

colorchecker CLASSIC



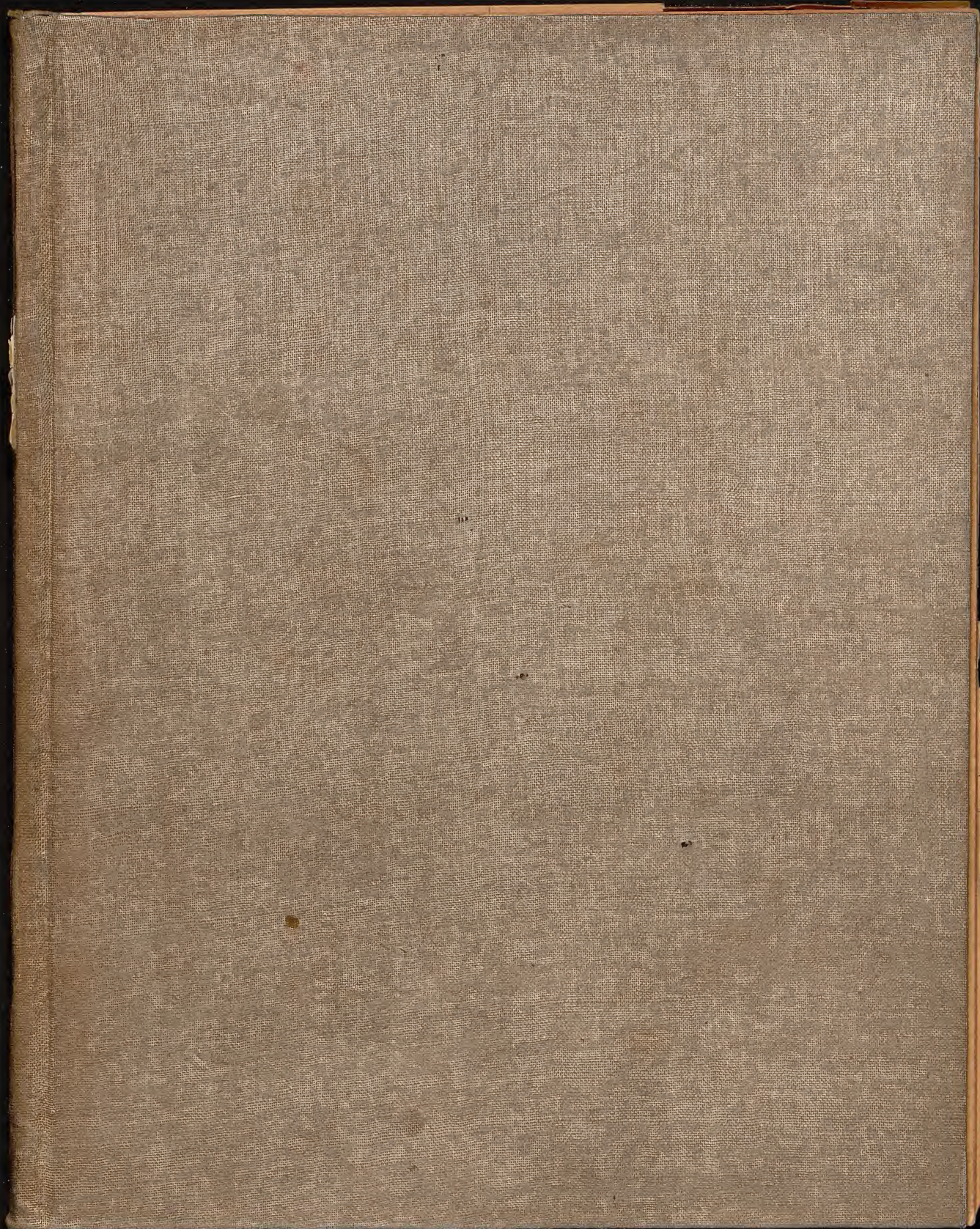
+ x-rite

mm

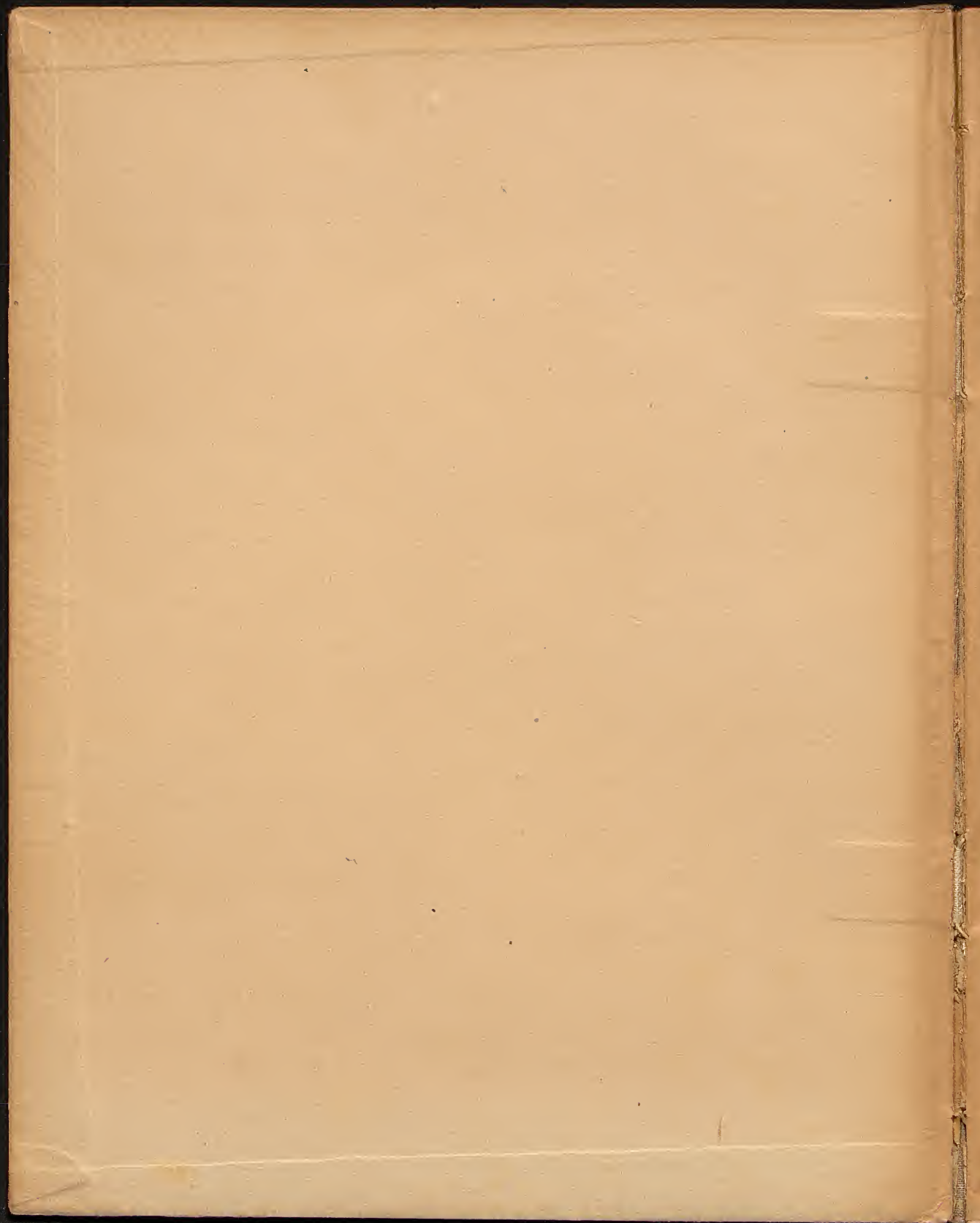
T

2.











Cours de M. Lannery  
Ecole Normale, 1<sup>re</sup> année (Sciences)  
1890-1891.  
2<sup>e</sup> cahier.



# Table

Leçons 19-20.	Fonctions de variables imaginaires (suite)	page 1.
21-25.	Suites, séries et produits infinis	25.
26-27.	Fonctions transcendantes	79.
28-31.	Applications géométriques	105.
	Développements en série	105.
	Tangentes	114.
	Longueur d'un arc de courbe	124.
	Aire d'une portion de surface	138.



1 19

Fonctions de variables imaginaires admettant des dérivées.

Les règles établies pour les dérivées de sommes, de produits, de quotients de fonctions de variables réelles subsistent, ainsi que leurs démonstrations, pour les fonctions de variables imaginaires.

Par exemple, soient  $u, v$  2 fonctions de la imaginaire  $z$ ;  
le produit  $uv$  a pour dérivée:  $uv' + vu'$ .

La dérivée logarithmique a pour expression:  $\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$ ,  
et ainsi de suite.

Le théorème des fonctions de fonctions subsiste ainsi que la démonstration. Si  $f(u)$  admet une dérivée, et si  $u$  est une fonction de  $z$ ,  $\varphi(z)$  admettant une dérivée,  $f(u)$  admet une dérivée par rapport à  $z$ , qui est:

$$f'(u) \varphi'(z)$$

Il faut d'ailleurs avoir soin dans toutes les définitions, de tenir compte des conditions qui traduisent les 2 équations aux dérivées partielles du 1<sup>er</sup> ordre:  $\varphi'_x = \psi'_y$   $\varphi'_y = -\psi'_x$ .

Le théorème des fonctions composées ne s'applique plus ici, car il repose sur le théorème des accroissements finis. Il subsiste toutefois, si l'on admet l'existence et la continuité des dérivées partielles du 2<sup>e</sup> ordre.

Règle de dérivation des fonctions inverses.

Soit une relation:

$$\varphi(z) = x,$$

$z$  et  $x$  étant des variables imaginaires. Supposons que  $q(z)$  soit déterminée et admette des dérivées pour toutes les valeurs de  $z$  situées à l'intérieur d'un contour simple  $B$ . Supposons de plus que cette relation permette de définir une fonction continue

$$z = f(x)$$

pour toutes les valeurs de  $x$  situées dans une certaine aire  $A$ , et que toutes les valeurs correspondantes de  $z$  soient situées dans l'aire  $B$ . — Dans ces conditions, la fonction  $f(x) = z$  admet une dérivée, qui est :

$$f'(x) = \frac{1}{q'(z)}$$

Soit en effet  $\xi$  l'accroissement de la variable imaginaire  $x$ , il donne lieu à l'accroissement  $\zeta$  de  $z$ , c'est-à-dire que :

$$f(x+\xi) = z+\zeta \quad \text{D'autre part:} \quad q(z+\zeta) = x+\xi$$

$$\frac{q(z+\zeta) - q(z)}{\zeta} = \frac{\xi}{\zeta}.$$

Or si  $\xi$  tend vers 0 par une loi quelconque,  $\zeta$  devra tendre vers 0, en vertu de la continuité, et par suite

$$\frac{q(z+\zeta) - q(z)}{\zeta} \quad \text{doit tendre vers} \quad q'(z).$$

Donc  $\frac{\xi}{\zeta}$  tend aussi vers  $q'(z)$ , et  $\frac{\zeta}{\xi}$  vers  $\frac{1}{q'(z)}$ , ce qui montre que la fonction  $z = f(x)$  admet pour dérivée

$$\frac{1}{q'(z)}.$$

Remarque. Restons dans le champ des variables réelles. On peut considérer une fonction imaginaire d'une variable réelle  $x$ ,



3

cà d. l'ensemble de 2 fonctions réelles de cette variable:

$$\varphi(x) + i\psi(x)$$

On pourra se proposer de déterminer la dérivée d'une pareille fonction comme limite du rapport des accroissements de la fonction et de la variable; on trouvera:  $\varphi'(x) + i\psi'(x)$ .

De même pour les dérivées suivantes. On verrait aisément que les règles relatives aux dérivées de la somme, du produit, du quotient subsistent pour les fonctions imaginaires de variables réelles.

Cela posé, si on considère une fonction d'une variable imaginaire:

$$f(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

et qu'on admette que  $x$  et  $y$  sont fonctions d'une var. réelle  $t$ :

$$z = \varphi(t) + i\psi(t)$$

$f(z)$  deviendra une fonction imaginaire de la variable réelle  $t$ .  
La dérivée par rapport à  $t$ , sera, en vertu du théorème des fonctions de fonctions,

$$f'(z) [\varphi'(t) + i\psi'(t)]$$

Cette remarque faite, revenons à une fonction imaginaire d'une variable réelle  $x$ :

$$\varphi(x) + i\psi(x)$$

Si les fonctions réelles  $\varphi, \psi$  sont continues et admettent des dérivées jusqu'au  $n^e$  ordre on pourra écrire:

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \frac{h}{1} \varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2} \varphi''(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)!} \varphi^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!} \varphi^{(n)}(x + \theta h)$$

$$\psi(x+h) = \psi(x) + \frac{h}{1} \psi'(x) + \frac{h^2}{1.2} \psi''(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \psi^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!} \psi^{(n)}(x + \theta' h)$$

$\theta$  et  $\theta'$  étant des nombres positifs compris entre 0 et 1.



$$\begin{aligned} & \text{Ajoutons ces 2 égalités membre à membre en multipliant par } i: \\ & \varphi(x+h) + i\psi(x+h) = \varphi(x) + i\psi(x) + \frac{h}{1} [\varphi'(x) + i\psi'(x)] + \frac{h^2}{1.2} [\varphi''(x) + i\psi''(x)] \\ & \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} [\varphi^{(n-1)}(x) + i\psi^{(n-1)}(x)] + \frac{h^n}{n!} [\varphi^n(x+\theta h) + i\psi^n(x+\theta h)] \end{aligned}$$

c'est à dire ;

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!} R$$

Formule analogue à celle de Taylor, sauf pour la forme de R,

$$R = \varphi^n(x+\theta h) + i\psi^n(x+\theta h)$$

Considérons le module de  $f^n(x)$  :  $\sqrt{\varphi^n(x)^2 + \psi^n(x)^2}$

Soit  $K$  la limite supérieure de ce module quand  $x$  varie de  $x$  à  $(x+h)$ . On aura :

$$\varphi^n(x+\theta h)^2 < K^2 \quad \text{et} \quad \psi^n(x+\theta h)^2 < K^2$$

donc on aura pour le module de  $\varphi^n(x+\theta h) + i\psi^n(x+\theta h)$  :

$$\sqrt{\varphi^n(x+\theta h)^2 + \psi^n(x+\theta h)^2} < K\sqrt{2}.$$

On pourra donc remplacer  $R$  par  $\lambda K$ ,  $\lambda$  étant une imaginaire telle que

$$0 < |\lambda| < \sqrt{2}.$$

Si les dérivées sont continues, il y aura une valeur de  $x$  comprise entre  $x$  et  $(x+h)$  pour laquelle le module sera maximum ;

Soit  $(x+\theta_1 h)$  cette valeur.  $K$  sera le module d'une expression telle que :

$$f^n(x+\theta_1 h)$$

En modifiant la valeur de  $\lambda$  sans qu'elle dépasse  $\sqrt{2}$ , on



5  
peut mettre le terme complémentaire R sous la forme  
$$\lambda f^n(t+\theta, h)$$

M. Darboux a montré qu'on pouvait même supposer  
 $|\lambda| < 1$ .

(Journal de Liouville, tome II, 3<sup>e</sup> série.)

Nous pouvons le démontrer d'une manière très-simple.

Soit  $f(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$  une fonction imaginaire de la variable réelle  $t$ ; si l'on suppose que les fonctions réelles  $\varphi, \psi$  sont continues et admettent des dérivées jusqu'à l'ordre  $p$  dans l'intervalle  $t_1, t_2$ , et si l'on pose:  $f'(t) = \varphi'(t) + i\psi'(t)$ , etc. on pourra écrire:

$$f(t+h) = f(t) + \frac{h}{1} f'(t) + \frac{h^2}{1.2} f''(t) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(t) \\ + \frac{h^n}{n!} (\varphi^n(t+\theta h) + i\psi^n(t+\theta h))$$

le terme complémentaire pouvant aussi s'écrire;

$$\lambda \frac{h^n}{n!} f^n(t+\theta, h)$$

$$0 < |\lambda| < \sqrt{2}$$

en supposant  $t$  et  $t+h$  pris dans l'intervalle  $t_1, t_2$ , et  $n < p$ .

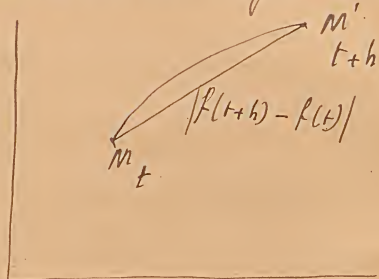
Si l'on fait  $n=1$ , l'égalité devient:

$$f(t+h) - f(t) = \lambda h f'(t+\theta, h)$$

formule analogue à celle des accroissements finis d'une fonction réelle d'une variable réelle.

Représentons géométriquement  $f(t)$  par le p.  $M$ ,  $f(t+h)$  par  $M'$ .

le module  $|f(t+h) - f(t)|$  est représenté par le segment  $MM'$ .  
 Si  $t$  représente le temps,  $\frac{MM'}{h}$  sera la vitesse moyenne d'un mobile qui parcourrait ce segment dans le temps  $h$ .



D'autre part, la vitesse vraie du mobile dont le mouvement a pour eq:  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$   
 a pour expression:  $\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}$

Or il est absurde de supposer que dans l'intervalle de  $t$  à  $(t+h)$  la vitesse moyenne ne soit jamais plus petite que la vitesse vraie, alors que le chemin sur la droite est plus court que sur la trajectoire.

Donc:  $\left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| < \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}$   
 et pour une valeur de  $t$  comprise entre  $t$  et  $(t+h)$ :  
 $\sqrt{\varphi'(t+\theta h)^2 + \psi'(t+\theta h)^2} = |f'(t+\theta h)| \quad 0 < \theta < 1.$

on doit donc avoir:  $\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lambda \sqrt{\varphi'(t+\theta h)^2 + \psi'(t+\theta h)^2}$

$\lambda$  étant une quantité imaginaire telle que:  $0 < |\lambda| < 1.$

Cette égalité joue le même rôle dans la théorie des fonctions imaginaires que la formule des accroissements finis pour les fonctions réelles.

— Revenons à la formule générale du développement de  $f(t+h)$ :  
 si l'on y fait  $t=0$ , et  $h=t$ , on a la formule analogue de celle de Maclaurin:

$$f(t) = f(0) + \frac{t}{1} f'(0) + \frac{t^2}{1.2} f''(0) + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \frac{t^n}{n!} \lambda f^{(n)}(\theta t)$$

$0 < \theta < 1.$



Soit  $F(z)$  une fonction d'une variable imaginaire définie pour tous les points d'une aire  $A$ . Supposons que  $F'(z)$  admette, pour ces points, des dérivées finies et continues jusqu'à l'ordre  $n$ .  
 Considérons 2 points,  $z_0$  et  $(z_0 + \zeta)$  situés à l'intérieur de  $A$  et tels que la droite qui les joint soit aussi à l'intérieur de  $A$ .  
 L'abscisse d'un point quelconque de cette droite sera de la forme:

$$z_0 + t\zeta$$

$$0 < t < 1.$$

Posons:  $z_0 = x_0 + iy_0$

$$\zeta = h + ik$$

on a:  $z_0 + t\zeta = x_0 + th + i(y_0 + tk)$

Le point  $(x_0 + th, y_0 + tk)$  décrit le segment rectiligne quand  $t$  varie de 0 à 1. Si l'on remplace dans  $F(z)$   $z$  par la valeur variable  $z_0 + t\zeta$ , on aura une fonction

$F(z_0 + t\zeta)$  de la variable réelle  $t$ . Lorsque  $t$  variera de 0 à 1 et même au-delà, cette fonction admettra des dérivées par rapport à  $t$  jusqu'à l'ordre  $n$ . On obtiendra ces dérivées par l'application du théorème des fonctions de fonctions: ce sont:

$$\zeta F'(z_0 + t\zeta), \zeta^2 F''(z_0 + t\zeta), \text{ etc.}$$

en appelant  $F'(z), F''(z), \dots$  les dérivées successives par rapp. à  $z$ .

Appliquons la formule de Maclaurin généralisée:

$$F(z_0 + t\zeta) = F(z_0) + \frac{\zeta}{1} F'(z_0) + \frac{\zeta^2}{1.2} F''(z_0) + \dots + \frac{\zeta^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n-1)}(z_0) + \frac{\zeta^n}{n!} F^{(n)}(z_0 + \theta t\zeta)$$



Faisons maintenant  $t = 1$  : la formule devient :

$$F(z_0 + z) = F(z_0) + \frac{z}{1} F'(z_0) + \frac{z^2}{1.2.} F''(z_0) + \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n-1)}(z_0) + \lambda \frac{z^n}{n!} F^{(n)}(z_0 + \theta z)$$

$\lambda$  est un imaginaire dont le module est inférieur à  $\sqrt{2}$  et même à 1. C'est une formule analogue à celle de Taylor.

— La question est maintenant de savoir s'il existe des fonctions imaginaires admettant des dérivées, et d'en construire de telles, s'il est possible. Or nous en avons déjà formé en associant 2 fonctions réelles; on peut en déduire d'autres par le théorème des fonctions inverses. Mais tout cela donne peu de résultats. C'est la théorie des équations différentielles qui fournit le moyen général de construire des fonctions de variables imaginaires. Nous allons indiquer les deux principaux procédés; ce sont : 1° la considération de la continuité; 2° la considération des séries.

— Le 1<sup>er</sup> procédé, applicable à l'étude des fonctions d'une variable imaginaire qui n'admettent pas de dérivée, consiste dans l'étude de l'argument d'une variable imaginaire. Cet argument est une fonction de la variable, mais pour chaque valeur de la variable il a une infinité de valeurs distinctes et déterminées. Pour il faut qu'on puisse définir l'argument comme une fonction univoque de la variable. C'est d'ailleurs une fonction réelle; elle n'admet une de ses valeurs est :  $\arctang \frac{y}{x}$ . La dérivée de cette fonction ne satisfait pas aux conditions des fonctions imaginaires.



209

Etude de l'argument d'une variable imaginaire.

L'argument du point  $z$  dans le plan  $Ox, Oy$  s'obtient, avons-nous dit, en faisant tourner un demi-droite mobile depuis  $Ox$  jusqu'à  $Oz$ , et en mesurant l'angle décrit par l'arc engendré sur la circonférence de rayon 1, pris avec le signe de la rotation.

Il faut établir certaines conventions qui fassent disparaître l'ambiguïté de cette définition, qui ne détermine l'argument qu'à un multiple près de  $2\pi$ .

Par le point  $O$  menons une demi-droite indéfinie coupant le plan, et assujettissons le point  $z$  à ne jamais traverser cette coupure. On définira alors l'argument de  $z$  l'angle engendré par un demi-droite qui passe de  $Ox$  à  $Oz$  sans traverser la coupure. L'argument est ainsi parfaitement défini pour tous les points du plan, sauf pour ceux de la coupure. C'est une fonction univoque et continue de  $z$  dans tout le plan.

En 2 points situés de part et d'autre de la coupure, et aussi voisins qu'on le voudra, les arguments n'ont pas des valeurs voisines, mais ils diffèrent d'une quantité voisine de  $2\pi$ .

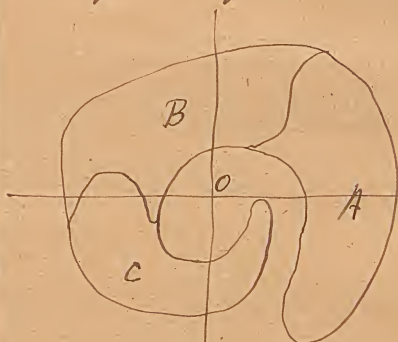
On pourrait prendre pour argument l'angle défini ci-dessus augmenté de  $2\pi$ , de  $4\pi$ , etc. ou diminué d'autant. On peut aussi définir une infinité de fonctions univoques et continues de  $z$ , qui diffèrent entre elles pour un même point d'un multiple de  $2\pi$ . Si l'on assujettit l'argument à être continu et qu'on se donne la valeur pour un point quelconque  $z_0$ , on définit une fonction



univoque de  $z$  pour tous les points du plan.

Considérons une aire quelconque limitée par un contour simple, ne contenant pas le point  $O$ , et telle qu'on puisse mener par  $O$  une demi-droite qui ne la rencontre pas; prenons cette droite pour coupure. Si l'on se donne l'argument d'un point  $z_0$  de cette aire, l'argument de  $z$  sera entièrement défini pour tous les points de cette aire (situés à l'intérieur ou sur son contour).

Considérons maintenant une aire quelconque <sup>(à contour simple)</sup> ne contenant pas le point  $O$ ; l'argument est encore défini dans toute cette aire pourvu qu'on se donne sa valeur pour un point  $z_0$ . En effet, on peut couper cette aire en morceaux, tels que chacun soit limité par un contour simple, et qu'on puisse pour chacun mener par  $O$  une demi-droite qui ne la rencontre pas. Supposons que  $z_0$  soit situé dans la portion  $A$ ; en un point  $z$ , du contour commun à  $A$  et à  $B$ , l'argument est défini; donc il est défini dans toute la portion  $B$ , et ainsi de suite. Ainsi l'argument est défini comme fonction univoque de  $z$  dans une aire quelconque limitée par un contour simple et ne contenant pas le point  $O$ , quand on se donne l'argument d'un point quelconque de cette aire, et qu'on assujettit cette fonction à varier d'une façon continue.

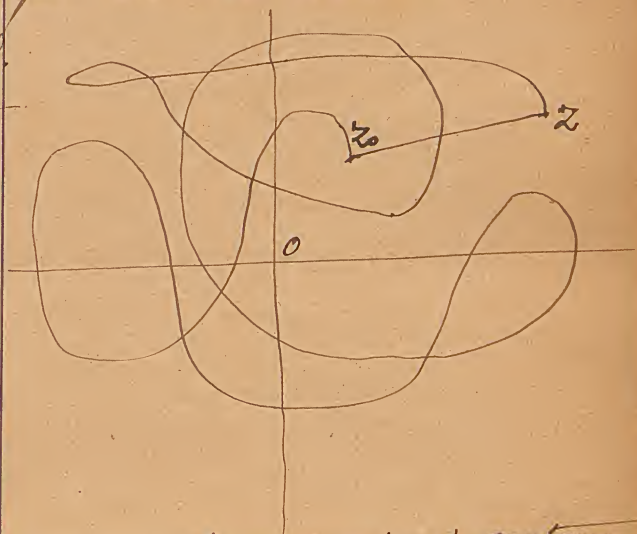




Considérons d'autre part une courbe quelconque partant d'un point  $z_0$  et aboutissant à un point  $z$  sans passer par le p.  $O$ .

On peut découper cette ligne en portions telles que l'une quelconque d'entre elles ne soit pas traversée par une demi-droite convenablement choisie, issue du point  $O$ .

Si l'on se donne l'argument du point  $z_0$ , et que l'on décrive la courbe d'une façon continue, l'argument sera défini d'une façon continue et univoque jusqu'au point  $z$ , pourvu que la courbe soit décrite dans un sens absolument déterminé.



Or, si la courbe pouvait être contenue dans une aile à contour simple n'enfermant pas le point  $O$ , on pourrait revenir de  $z$  à  $z_0$  en y retrouvant le même argument qu'au départ.

Dans le cas d'un cercle ayant  $O$  pour centre et décrit à partir de  $z_0$  dans le sens direct, l'argument de  $z_0$  est augmenté de  $2\pi$  après un tour; il est diminué de  $2\pi$  si le tour est fait dans le sens inverse. Après  $k$  tours, il est augmenté ou diminué de  $2k\pi$ . — La même conclusion subsiste si le point  $z$  décrit une courbe quelconque enfermant le point  $O$  et revenant au point  $z_0$  sans se croiser.

Pour plus de précision, prenons 2 points voisins  $z_0, z_1$  où se

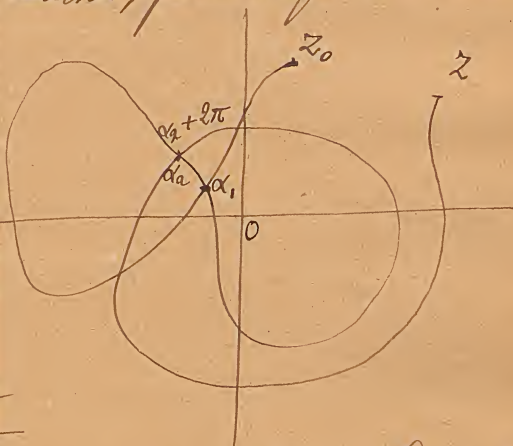
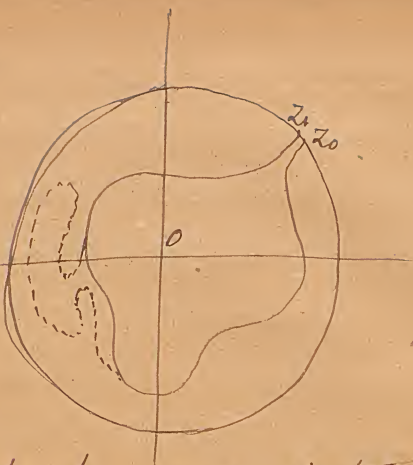


terminent à la fois la courbe considérée et le cercle de centre  $O$ , l'aire comprise entre le cercle et la courbe ne contient pas  $O$ ; l'argument est donc défini dans l'aire entière, si l'on se donne sa valeur pour  $z_0$ ; l'argument de  $z_1$  a toujours la même valeur, soit qu'on suive le cercle, soit qu'on suive la courbe; donc, si  $z_1$  vient se confondre avec  $z_0$ , il aura le même argument, augmenté ou diminué de  $2\pi$ .

Les sinuosités de la courbe faisant rebrousser le rayon vecteur dans la rotation ne changent rien à ce résultat, pourvu que la courbe ne se croise pas elle-même (pointillé).

Quand la courbe se croise, l'argument reste le même au point de croisement ou augmente de  $2\pi$ , suivant que la boucle n'enferme pas ou enferme le point  $O$ .

En résumé, autant de tours le rayon vecteur fait autour de  $O$ , autant de fois l'argument est augmenté ou diminué de  $2\pi$ . Ces règles suffisent pour déterminer l'argument tel long d'une courbe aussi compliquée qu'on voudra l'imaginer.





Nous venons de définir l'argument comme fonction univoque.  
 On pourrait définir de même l'angle de 2 directions issues d'un  $O$   
 et allant à 2 points  $z, z_1$ . L'angle  $\angle Oz_1$  s'obtiendra en faisant  
 passer une demi-droite de  $Oz$  à  $Oz_1$  sans traverser la coupure.  
 On définit ainsi un angle  $\angle z z_1$  unique et inférieur à  $2\pi$ .  
 On a évidemment:  $\angle_1 z = -\angle z_1$ .

On a aussi:  $\angle z_1 + \angle_1 z_2 + \angle_2 z = 0$

En effet, on peut représenter les 3 points  $z, z_1, z_2$  par leurs perspec-  
 tives sur le cercle de rayon 1 ayant  $O$  pour centre, et prendre  
 pour chaque arc  $z z_1, z_1 z_2, z_2 z$  celui des 2 arcs déterminés par  
 les 2 points qui ne rencontre pas la coupure. On a alors:

$$\angle z z_2 = \angle z z_1 + \angle_1 z_2 \quad \text{ou} \quad \angle z_1 + \angle_1 z_2 + \angle_2 z = 0$$

ce qui montre que la relation est symétrique par rapport aux 3  
 angles ou aux 3 arcs, quand on parcourt ces arcs comme un  
 circuit fermé.

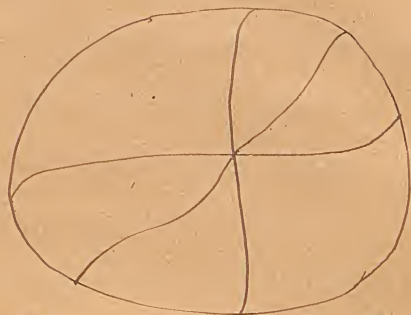
L'angle de 2 directions <sup>variables</sup> ~~quelconques~~ pourra être défini d'une  
 manière univoque, comme l'argument, en supposant que l'un des  
 points  $z$  décrit dans un sens déterminé une courbe ne passant  
 pas par l'origine, ou bien qu'il reste enfermé dans une aire à  
 contour simple ne contenant pas l'origine. Dans ces conditions,  
 la relation précédente subsiste dans tous les cas.

L'angle  $\angle z z_1$  n'est autre chose que la différence des arguments de  $z$   
 et de  $z_1$ . On voit que si l'on imagine qu'un point se déplace sur une  
 courbe d'une façon continue et dans un sens déterminé, la variation



de chargement ne dépend pas de la première valeur qu'on lui attribue. Si l'on partage une courbe en morceaux bout à bout, la variation totale de chargement le long de cette courbe est la somme des variations partielles.

Si l'on considère un contour simple et qu'on le décompose en plusieurs autres contours simples par des courbes transversales, la variation de chargement, quand on part d'un point de ce contour et qu'on le suit dans le sens direct jusqu'à ce qu'on revienne au point de départ, est égale à la somme des variations obtenues en parcourant chacun des contours fermés dans le même sens. — En effet, les variations correspondant aux contours intérieurs se détruisent dans la somme, puisque chacun de ces contours est parcouru 2 fois dans le sens inverse.



— Si, au lieu de considérer une variable imaginaire, nous considérons une fonction de cette variable, soit  $f(z)$  continue pour toutes les valeurs de  $z$  représentées par les points situés à l'intérieur d'une certaine aire  $A$ , nous pourrions définir d'une manière univoque l'argument de  $f(z)$  comme nous avons fait celui de  $z$ , puisque cette définition repose uniquement sur la continuité; à la seule condition qu'on ne passe pas par le point 0, c'est-à-dire que  $f(z)$  ne s'annule pas, ou encore que  $z$  ne passe pas par les racines de l'équation;

$$f(z) = 0.$$



15

Supposons, pour préciser, que le point qui représente  $f(z)$  reste dans une certaine aire limitée par un contour simple et ne contenant pas l'origine; la valeur de l'argument de  $f(z)$  sera déterminée par continuité pour tous les points de cette aire dès qu'on lui assignera une certaine valeur pour un point fixe.

Si,  $z$  décrivant une courbe continue,  $f(z)$  décrit aussi une courbe continue sans passer par l'origine, l'argument de  $f(z)$  sera déterminé pour <sup>chaque</sup> tous les points de la courbe si on se donne sa valeur pour un point initial arbitraire, et si de plus on connaît le chemin correspondant parcouru par  $z$ .

De même, la proposition concernant un contour simple qu'on fait décrire au point  $z$  dans un sens déterminé s'applique aux variations de l'argument de  $f(z)$  le long d'un contour simple.

Remarquons que tout ce qui a été dit sur la manière de définir l'argument de  $z$  et d'en étudier les variations s'applique à la définition et à la variation de l'argument de  $(z-a)$ ; il suffit de transporter les axes parallèlement à eux-mêmes de manière à placer l'origine au point  $a$ .

Si le point  $z$  est assujéti à se mouvoir dans une aire limitée par un contour simple et ne contenant pas  $a$ , l'argument de  $(z-a)$  sera fixé dans cette aire si l'on se donne sa valeur pour un point quelconque. Il sera fixé de même le long d'une courbe quelconque ne passant pas par  $a$ . Si le point  $z$  décrit une courbe fermée qui ne contient pas  $a$ , l'argument de  $(z-a)$  reprendra



sa valeur initiale. - Si la courbe enferme le point  $a$ , l'argument de  $(z-a)$  aura varié de  $2\pi$ .

- Considérons le produit :

$$A(z-a_1)(z-a_2)\dots\dots\dots(z-a_n) = f(z)$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$  et  $A$  étant des constantes. C'est un polynôme entier en  $z$ , c'à d. une fonction continue de  $z$ . Pour une valeur de  $z$  différente de  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , on peut prendre pour argument du polynôme la somme des arguments des binômes  $(z-a_i)$ , et si l'on fait varier  $z$  d'une manière continue, sans passer par aucun point  $a_i$ , la somme de ces arguments variera d'une façon continue, et on aura toujours pour l'argument de  $f(z)$  la même valeur que si l'on avait suivi la valeur de cet argument à partir de la valeur initiale, en supposant que le point  $f(z)$  se déplace d'une <sup>façon</sup> ~~infiniment~~ continue de manière à toujours correspondre au point  $z$  dont il est fonction.

Imaginons que la variable  $z$  décrive un contour simple quelconque ne passant par aucun point  $a_i$ , et le suivre dans le sens direct. Si  $a_1$  n'est pas situé à l'intérieur de ce contour, l'argument de  $(z-a_1)$  ne change pas de valeur après un tour; au contraire, il augmente de  $2\pi$  si  $a_1$  est à l'intérieur.

L'argument augmente donc d'autant de fois  $2\pi$ , après un tour, qu'il y a de points  $a_i$  situés à l'intérieur du contour.

Autrement dit :

Théorème de Cauchy. Si l'on considère un polynôme entier



en  $z$  et un contour simple quelconque, et qu'on suppose que  $z$  décrit ce contour dans le sens direct, la variation de l'argument après un tour contient autant de fois  $2\pi$  que le contour enferme de racines de ce polynôme.

Les racines multiples comptent pour autant de racines qu'il y a d'unités dans leur ordre.

Cette importante proposition a pour conséquences des propriétés déjà démontrées, par exemple la possibilité de décomposer un polynôme entier du degré  $n$  en  $x$  en un produit de  $n$  binômes du 1<sup>er</sup> degré en  $x$ .

— Ces considérations ne nous ont fait encore connaître aucune fonction nouvelle. Cependant elles nous amènent à en définir une fort remarquable.

Soit une variable imaginaire :  $z = x + iy$ .

Considérons la fonction de  $z$  définie comme suit :

$$f(z) = I \sqrt{x^2 + y^2} + i(\arg z)$$

$\arg z = \alpha$  défini par les relations :

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Cette fonction sera complètement définie dans les mêmes conditions que l'argument, par ex. si l'on fait une coupure dans le plan et qu'on fixe une valeur pour de l'argument pour un certain point  $z$  (par ex. pour  $z$  réel et positif).

On peut constater que les fonctions réelles qui composent  $f(z)$



satisfait aux conditions qui traduisent les équations aux dérivées partielles;  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$   $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$

On a:  $\varphi = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$

$\psi = \arg z = \alpha$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Preuons les dérivées de  $\arg \alpha$ , par rapport à  $x$  et à  $y$ :

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{y}{x^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{1}{x}$$

ou plutôt:  $\frac{\partial \arg \frac{y}{x}}{\partial x} = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$   
 $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$   $\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$

D'où:  $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$   $\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$

La dérivée de la fonction par rapport à  $z$  est:

$$f'(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{z}$$

Cette fonction ayant pour dérivée  $\frac{1}{z}$ , s'appellera par analogie logarithme de  $z$ . Elle n'est d'ailleurs entièrement déterminée que si l'on définit l'argument de  $z$  d'une manière univoque.

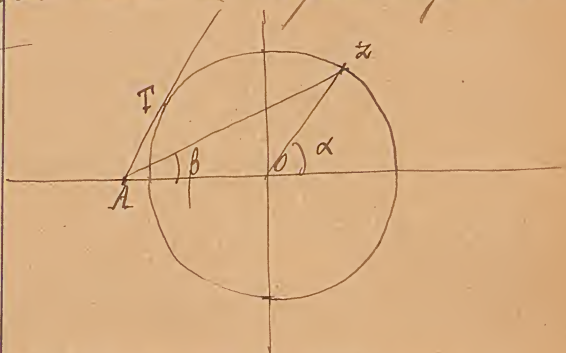
La propriété fondamentale des logarithmes subsiste pour cette fonction: c'est ce qui en justifie l'introduction. On voit en effet aisément que le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs. La somme des logarithmes des modules des facteurs est égale au logarithme du produit de ces modules, et d'argument la somme des arguments de ces facteurs est égale à l'argument de leur produit.



Argument de  $(1+z) = z - (-1)$ . Prenons le point  $A = -1$ .

On pourra définir  $z$  dans un contour simple ne contenant pas  $A$ ; par ex. dans un cercle ayant pour centre  $O$  et pour rayon  $1-\epsilon$ .

L'argument de  $(1+z)$  sera l'angle  $OAz$ ; pour qu'il soit complètement défini, on peut supposer qu'il est nul pour  $z$  réel et positif. Il sera toujours inférieur à l'angle droit  $OAT$ , tout en pouvant différer de  $90^\circ$  d'autant peu qu'on voudra.



On peut arriver aux mêmes conclusions analytiquement.

Supposons:  $z = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$

$$1+z = 1 + \rho \cos \alpha + \rho i \sin \alpha$$

$$|1+z| = \sqrt{1 + 2\rho \cos \alpha + \rho^2}$$

$$\cos \beta = \frac{1 + \rho \cos \alpha}{\sqrt{1 + 2\rho \cos \alpha + \rho^2}}$$

$$\sin \beta = \frac{\rho \sin \alpha}{\sqrt{1 + 2\rho \cos \alpha + \rho^2}}$$

On a toujours  $\rho < 1$ , ~~donc aussi~~, car on doit avoir:

$$1 + \rho \cos \alpha > 0$$

On peut prendre pour la valeur de l'argument l'angle compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $+\frac{\pi}{2}$ , c'est la valeur géométrique de:

$$\text{arc tang } \frac{\rho \sin \alpha}{1 + \rho \cos \alpha}$$

D'où l'expression suivante du logarithme de  $(1+z)$ :

$$\pm (1 + \rho \cos \alpha + \rho i \sin \alpha) = \pm \sqrt{1 + 2\rho \cos \alpha + \rho^2} + i \text{ arctg } \frac{\rho \sin \alpha}{1 + \rho \cos \alpha}$$

Telle est une des déterminations du logarithme, pourvu que  $\rho < 1$ . Les autres s'obtiendraient en ajoutant à celle-là:  $2k\pi i$ .



Ainsi, quand un point décrit un contour fermé, après un tour complet, son module reprend la même valeur, c.à.d. que la partie réelle de l'affixe de son logarithme a la même valeur. La partie imaginaire varie comme l'argument du point, de sorte qu'au lieu de considérer la variation du log. d'un polynôme on peut étudier celle de son argument.

Racine carrée de  $z$ . Cherchons s'il existe une fonction  $u$  de  $z$  telle que l'on ait :

$$u^2 = z.$$

Posons:  $z = \rho (\cos \alpha + i \sin \alpha)$

que:  $\sqrt{\rho} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$

On voit immédiatement satisfait à l'éq. précédente.

Il est manifeste que lorsque  $z$  varie d'une façon continue,  $u$  varie aussi d'une façon continue.

Nous pouvons appeler  $\sqrt{z}$  la racine de l'éq:  $u^2 = z$ ; cette racine sera définie toutes les fois que l'argument de  $z$  le sera.

Supposons que  $z$  décrive dans le sens direct un contour simple entourant l'origine. Après un tour entier, son argument aura augmenté de  $2\pi$ . L'argument de  $\sqrt{z}$  aura augmenté de  $\pi$ , c.à.d. que  $\sqrt{z}$  aura changé de signe. On en conclut que  $\sqrt{z}$  ne peut avoir que 2 valeurs égales et de signes contraires; en effet, à chaque tour fait par  $z$ , la valeur de  $\sqrt{z}$  fait un demi-tour, c.à.d. passe de l'une à l'autre de ces 2 valeurs. Aux valeurs de l'argument de  $z$ , qui diffèrent entre elles de  $2\pi$ , correspondent une série de valeurs de l'argument de  $\sqrt{z}$ , qui diffèrent entre elles de  $\pi$ .

La fonction  $\sqrt{z}$  est-elle déterminée? - Appliquons le théorème



des fonctions inverses; S'il y a une fonction continue de  $z$  satisfaisant à l'équation :  $u^2 = z$ ,  
sa dérivée doit être  $\frac{1}{2u} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$ .

Supposons qu'on mène dans le plan une coupure issue du pt 0.  $\sqrt{z}$  sera entièrement définie dans tout le plan. Considérons 2 points voisins de part et d'autre de la coupure, pour ces 2 points les valeurs de  $\sqrt{z}$  ne sont pas voisines, mais chacune est voisine de l'autre changée de signe.

— On pourrait définir de même :  $\sqrt{z-a}$ ,  
car on sait définir l'argument de  $(z-a)$ .

On trouve par le théorème des fonctions de fonctions que la dérivée de  $\sqrt{z-a}$  est  $\frac{1}{2\sqrt{z-a}}$ .

On trouvera de même la dérivée de  $\sqrt{f(z)}$  pourvu qu'on sache définir l'argument de  $f(z)$ ; ce sera :  $\frac{f'(z)}{2\sqrt{f(z)}}$ .

En particulier, on pourra définir  $\sqrt{(z-a)(z-b)}$  quand on sait définir l'argument de  $(z-a)$  et de  $(z-b)$ .

Marquons dans le plan les points  $a, b$ ; dans toute aire limitée par un contour simple et ne contenant pas  $a, b$ , l'argument de  $(z-a)$  et de  $(z-b)$  est entièrement déterminé. Il est aussi défini le long d'une courbe ne passant pas par  $a, b$ , pourvu qu'on se donne sa valeur initiale.  
Si  $z$  suit un contour simple qui enferme les points  $a, b$ ,

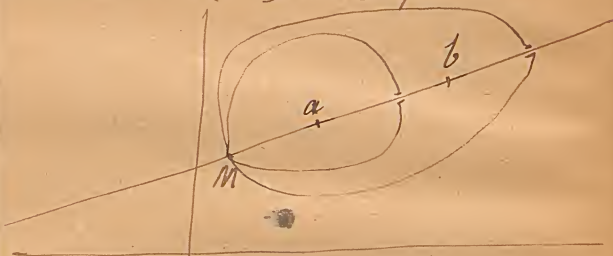


l'argument de  $(z-a)(z-b)$  aura augmenté de  $2\pi$  après un tour;  
celui de  $\sqrt{(z-a)(z-b)}$  aura augmenté de  $\pi$ , c'est-à-dire que  
l'affixe de  $\sqrt{(z-a)(z-b)}$  n'aura pas changé.

Tracons une coupure rectiligne par les points  $a, b$ ; la  
fonction  $\sqrt{(z-a)(z-b)}$  sera déterminée dans tout le plan si  
on se donne un système de valeurs pour les arguments de  $(z-a)$ ,  
 $(z-b)$ . On peut définir l'argument de  $\sqrt{(z-a)(z-b)}$  par sa  
valeur en un point  $M$  de la  
coupure; cette détermination sera  
étendue aux 2 moitiés du plan.

Considérons 2 courbes issues du  
point  $M$  de chaque côté de la  
coupure et aboutissant à la  
coupure entre les points  $a, b$ ;  
les 2 valeurs du <sup>radical</sup> argument, de part et d'autre de la coupure, sont  
presque égales, mais de signes contraires: en effet, l'argument de  $(z-a)$   
a varié de  $2\pi$  sans que l'argument de  $(z-b)$  ait changé; donc  
l'argument de  $\sqrt{(z-a)(z-b)}$  a varié de  $\pi$ .

Si l'on trace des courbes issues du p.  $M$  et aboutissant de  
part et d'autre de la coupure au delà de  $a, b$ , les 2 valeurs  
du radical sont presque égales, et de même signe, parce que l'argu-  
ment du radical a varié de  $2\pi$ . On peut donc effacer la coupure  
en dehors du segment  $a, b$ ; il suffit de se souvenir de faire  
traverser ce segment à  $z$ . Ainsi la fonction  $\sqrt{(z-a)(z-b)}$  est





définie d'une façon <sup>et continue</sup> univoque pour tout le plan (sauf pour les p.  
du segment  $a, b$ ) et de chaque côté de ce segment, ses valeurs sont  
égales et de signes contraires.

— On peut étendre ces conclusions à la fonction :

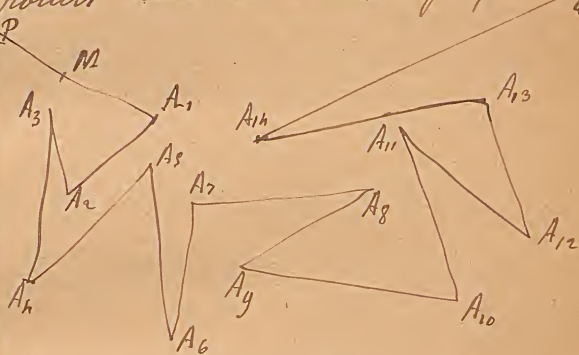
$$\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)\dots\dots(z-a_n)}$$

Marquons sur le plan les points  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Imaginons une  
ligne brisée joignant tous ces points sans se croiser, et joignons-y  
deux droites qui achèvent la coupe sans croiser la ligne  
brisée; l'argument de la  
fonction sera défini dans les  
deux moitiés du plan. Mais si  
l'on prend pour valeur initiale  
celle qu'il a au p.  $M$ , sur la demi-  
droite  $A_1P$ , on vient de voir que les valeurs seront égales et de même  
signe de chaque côté du 2<sup>e</sup> segment  $A_2A_3$ , puis de chaque côté du  
3<sup>e</sup> segment  $A_4A_5$ , et ainsi de suite. On pourra donc supprimer  
la demi-droite  $A_1P$  et tous les segments d'ordre pair. Si leur  
nombre est impair (c'est-à-d.  $n$  pair) la demi-droite  $A_nQ$  disparaît;  
sinon, elle subsiste comme coupe.

— Plus généralement, on peut définir la fonction de  $z$  :

$$u = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left( \cos \frac{\alpha}{n} + i \sin \frac{\alpha}{n} \right)$$

quand on a défini l'argument de  $z$ . On voit que  $u$  est susceptible  
de  $n$  valeurs distinctes qu'on obtient en faisant tourner  $z$   $n$  fois  
autour de 0. On pourra définir l'argument de  $\sqrt[n]{z}$  d'une façon  
univoque et continue







25  
210

# Suites, Séries et produits infinis.

Étant donnée une suite de nombres réels

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n,$$

dont chacun est déterminé par son rang  $n$ , on dit qu'elle a une limite  $A$  quand à un nombre positif quelconque  $\varepsilon$  on peut faire correspondre un entier  $p$  tel qu'on ait:

$$|A - u_n| < \varepsilon \quad \text{pour tout } n > p.$$

De même, une suite de nombres imaginaires aura pour limite  $A$  quand on pourra écrire:

$$\text{mod}(A - u_n) < \varepsilon \quad \text{pour tout } n > p.$$

Si, dans le cas de termes imaginaires, on a:

$$u_n = a_n + ib_n \quad \text{et} \quad A = p + qi$$

on aura:  $A - u_n = p - a_n + i(q - b_n)$

Pour que la <sup>modulus de</sup> cette expression soit inférieur à  $\varepsilon$ , il faut qu'on ait séparément:  $p - a_n < \varepsilon$ ,  $q - b_n < \varepsilon$ ;

il faut donc que la suite  $a_n$  ait pour limite  $p$ , et la suite  $b_n$  pour limite  $q$ .

On démontrerait que reciproquement, si les nombres  $a_n$  ont pour limite  $p$ , et les nombres  $b_n$  ont pour limite  $q$ , les nombres  $(a_n + ib_n)$  ont pour limite  $(p + qi)$ .

Ainsi, dire qu'une suite de nombres imaginaires admet une limite, c'est dire que 2 suites de nombres réels ont des limites.





On étend sans difficulté aux suites à termes imaginaires les propriétés démontrées pour les suites de nombres réels.

En particulier, la règle de convergence de Cauchy s'applique presque sans modification aux suites à termes imaginaires :

- Pour qu'une suite admette une limite, il faut qu'à chaque nombre positif  $\varepsilon$  on puisse faire correspondre un entier  $p$  tel qu'on ait :

$$|u_n - u_{n'}| < \varepsilon \quad \text{pourvu que} \quad n > n' \geq p.$$

La condition est évidemment nécessaire pour les nombres imaginaires comme pour les nombres réels. Elle est aussi suffisante : car si elle est remplie, les 2 suites formées par les éléments réels de  $u_n$  ont chacune une limite.

- Considérons maintenant les séries dont les termes sont des nombres qui ne dépendent que de l'indice, ou séries à termes constants. Toute la théorie des séries repose sur la considération des séries à termes réels et positifs.

Soit :  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$   
une série à termes réels et positifs. Appelons  $S_n$  la somme des  $n$  premiers termes.  $S_n$  ne peut que croître quand  $n$  grandit indéfiniment. Si  $S_n$  reste constamment inférieure à un nombre fixe, elle a une limite qui est la somme des termes de la série infinie, et qui est indépendante de l'ordre de ces termes.

En effet, soit :  $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots$



une série obtenue en changeant l'ordre des termes de la série  $a_n$ . La somme de la 2<sup>e</sup> série est au plus égale à  $S$ ; donc elle a une limite. Soit maintenant un nombre  $S' < S$ ; on peut prendre dans la 2<sup>e</sup> série assez de termes pour que leur somme dépasse  $S'$ . Donc la somme de la 2<sup>e</sup> série infinie est égale à  $S$ ; ~~cette~~ ~~série~~ a encore pour limite  $S$ .

— Pour s'assurer de la convergence d'une série à termes positifs, le procédé général consiste à la comparer à une autre dont on connaît la convergence ou la divergence; si les termes de la série en question deviennent à partir d'un certain rang inférieurs aux termes correspondants de la série convergente ou supérieurs aux termes correspondants de la série divergente, la série considérée est convergente ou divergente.

On établit aisément les 2 propositions suivantes:

Si 2 séries à termes positifs,  $a_n, b_n$ , sont telles que le rapport des 2 termes correspondants  $\frac{a_n}{b_n}$  tende vers un nombre fixe  $K$ , si la 1<sup>re</sup> série est convergente, la 2<sup>e</sup> l'est. Si  $K$  est nul, et que la 2<sup>e</sup> série soit convergente, la 1<sup>re</sup> l'est aussi.

— Soit maintenant une série à termes imaginaires:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

On dira qu'elle est convergente si la somme des  $n$  premiers termes tend vers une limite quand  $n$  croît indéfiniment.

On dira qu'elle est absolument convergente, si la série



des valeurs absolues :  $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$   
 est convergente dans le  $1^{\text{er}}$  sens, c'est-à-dire que la somme de ses termes a  
 une limite. On peut s'en rendre compte en considérant les 2 séries  
 formées par les éléments réels des termes imaginaires. On peut  
 aussi appliquer la règle de Cauchy :

Pour qu'une suite soit convergente, il faut qu'à chaque  
 nombre positif  $\varepsilon$  on puisse faire correspondre un entier  $p$   
 tel qu'on ait :  $|u_n - u_{n'}| < \varepsilon$  pour  $n$  que  $n' > p$ .

Or  $S_n - S_{n'} = a_{n'+1} + a_{n'+2} + \dots + a_n$   
 et par conséquent, à chaque nombre positif  $\varepsilon$  on peut faire  
 correspondre un entier  $p$  tel que, pour  $n > n' > p$ ,  
 on ait :  $|a_{n'+1}| + |a_{n'+2}| + \dots + |a_n| < \varepsilon$

Or la somme des modules est au ~~plus~~ <sup>moins</sup> égale au module de la  
 somme; donc a fortiori :  $|S_n - S_{n'}| < \varepsilon$ ,

ce qui prouve que la suite  $S_n$  ou la série  $a_n$  a une limite.

Cette limite est indépendante de l'ordre des termes; soit la nouvelle  
 série :  $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots$   
 obtenue en intervertissant l'ordre des termes de la série

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

La série :  $|b_1| + |b_2| + |b_3| + \dots + |b_n| + \dots$   
 n diffère que par l'ordre de la série

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| + \dots$$

donc elle a même limite ou même somme; par conséquent,



la série  $b_n$  est absolument convergente comme la série  $a_n$ .

Reste à prouver qu'elle a même somme. Soit  $S_n$  la somme des  $n$  premiers termes de la série  $a_n$ , et  $T_n$  la somme des  $n$  premiers termes de la série  $b_n$ . Après avoir formé  $T_n$ , prenons dans la série  $a_n$  un nombre de termes  $n' > n$  suffisant pour que tous les termes de  $T_n$  figurent dans  $S_{n'}$ . Soient d'autre part  $\sigma_{n'}$ ,  $\tau_n$  les sommes correspondantes des séries des valeurs absolues de  $a_n$ ,  $b_n$ ; on a évidemment :

$$|S_{n'} - T_n| \leq \sigma_{n'} - \tau_n$$

en vertu de la propriété du module d'une somme. Si  $n$  augmente indéfiniment,  $\tau_n$  tend vers la somme des valeurs absolues, et  $\sigma_{n'}$  aussi, car  $n'$  augmente indéfiniment avec  $n$ ; donc le 2<sup>e</sup> membre de l'inégalité tend vers 0, et l'1<sup>er</sup> aussi; or  $S_{n'}$  et  $T_n$  ont pour limites respectives les sommes des 2 séries  $a_n$  et  $b_n$ ; donc ces sommes sont égales.

— A ces propositions élémentaires sur les séries rattachons quelques théorèmes analogues touchant les produits infinis.

Considérons une suite infinie:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$   
et le produit infini:  $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3) \dots (1+a_n) \dots$

Soit  $P_n$  le produit des  $n$  premiers facteurs. Il paraît naturel de dire que le produit infini est convergent lorsque  $P_n$  tend vers une limite quand  $n$  augmente indéfiniment. Mais nous imposons



une restriction à la définition de la convergence d'un produit infini.

Considérons le cas où  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sont positifs ou nuls, et cherchons la condition pour que  $P_n$  tende vers une limite quand  $n$  augmente indéfiniment. Or  $P_n$  ne peut qu'augmenter quand  $n$  augmente; donc, pour que  $P_n$  ait une limite, il suffit qu'il reste inférieur à un nombre fixe. Développons ce produit:

$$P_n = 1 + \sum a_i + \sum a_i a_j + \sum a_i a_j a_k + \dots + \sum a_i a_j a_k \dots a_n$$

Pour que  $P_n$  n'augmente pas indéfiniment, il faut que <sup>le produit des</sup>  $a_n$  ne croisse pas indéfiniment avec  $n$ , c.à.d. que la série  $a_n$  soit convergente.

Réciproquement, si cette série est convergente, le produit  $P_n$  l'est aussi. En effet,

$$P_n < 1 + S_n + \frac{S_n^2}{1.2} + \frac{S_n^3}{1.2.3} + \dots + \frac{S_n^n}{n!} < e^S$$

$$\text{car } S_n < S.$$

Donc la condition nécessaire et suffisante pour que  $P_n$  ait une limite, quand  $n$  augmente indéfiniment, est que la série des nombres positifs ou nuls:  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$  soit convergente. Cette limite peut s'écrire:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = e^S$$

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Considérons la série  $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots$  obtenu en rangeant les termes de la série  $a_n$  dans un autre ordre; le produit infini  $(1+b_1)(1+b_2)\dots(1+b_n)\dots$



Sera encore convergent, puisque la série  $b_n$  est convergente.  
 Reste à prouver que la limite est la même que celle du produit  $(1+a_n)$ . Or soit  $P$  la valeur du 1<sup>er</sup> produit infini; comme tous les facteurs du 2<sup>e</sup> figurent dans le 1<sup>er</sup>, leur produit est au plus égal à  $P$ ; donc le produit est convergent (dans le 2<sup>e</sup> sens).  
 D'autre part, si l'on prend un nombre  $P' < P$ , on peut prendre dans le 1<sup>er</sup> produit et par suite dans le 2<sup>e</sup> assez de facteurs pour que leur produit dépasse  $P'$ . Donc le 2<sup>e</sup> produit infini est égal à  $P$ .

Cela posé, et les nombres  $a_1, a_2, \dots, a_n$  étant quelconques, on dira que le produit infini:  $\prod_{n=1}^{n=\infty} (1+a_n)$  est absolument convergent si la série:  $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| + \dots$  est convergente, et l'on va prouver que dans ces conditions, le produit  $P_n$  des  $n$  premiers facteurs tend vers une limite quand  $n$  augmente indéfiniment.

Tout d'abord, le produit infini:  $\prod_{n=1}^{n=\infty} (1+|a_n|)$  est sûrement convergent; donc le produit  $Q_n$  des  $n$  premiers facteurs tend vers une limite  $Q$ . Pour prouver que  $P_n$  a une limite pour  $n = \infty$ , il suffit de montrer qu'à chaque nombre positif  $\epsilon$  on peut faire correspondre un entier  $p$  tel qu'on ait:

$$|P_{n'} - P_n| < \epsilon \quad \text{à la condition: } n' > n \geq p.$$

Or puisque  $Q_n$  a une limite, je puis dans les mêmes conditions avoir l'inégalité:  $Q_{n'} - Q_n < \epsilon$ .



Supposons qu'on développe le produit  $P_n$  sous la forme d'un polynôme entier en  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , à coefficients positifs tous égaux à 1. Si on le multiplie par  $(1 + a_{n+1})$ , on a d'abord tous les termes précédents, plus d'autres obtenus en multipliant ceux-ci par  $a_{n+1}$ . Donc, si l'on forme le produit  $P_n, P_{n'}$ , dans le 2<sup>e</sup> se trouvent quelques facteurs de plus que le 1<sup>er</sup>, et qu'on les développe, tous les termes du 1<sup>er</sup> figurant dans le 2<sup>e</sup>; leur différence sera un polynôme entier à coefficients positifs. On voit qu'on peut déduire le développement de  $(Q_{n'} - Q_n)$  de celui de  $(P_{n'} - P_n)$  en remplaçant dans ce dernier tous les termes par leur valeur absolue. Or, quand un polynôme a tous ses coefficients positifs, le module de ce polynôme est au plus égal au polynôme qu'on obtient en remplaçant tous les termes par leur valeur absolue. Donc si :

$$Q_{n'} - Q_n < \varepsilon, \quad \text{on aura a fortiori :}$$

$$|P_{n'} - P_n| < \varepsilon.$$

Ainsi, quand un produit infini est absolument convergent, le produit de ses  $n$  premiers termes tend vers une limite. Nous allons prouver maintenant que cette limite ne dépend pas de l'ordre des facteurs.

Supposons qu'on intervertisse l'ordre des facteurs du produit infini  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  de manière à former le produit infini  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + b_n)$ . Celui-ci est absolument convergent, puisque la série  $(b_n)$  est absolument convergente et a pour



33

limite la somme de la série infinie  $(a_n)$ . Donc  $P'_n$  tend vers une limite; reste à prouver que cette limite est celle de  $P_n$ .

Considérons le produit infini:  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |b_n|)$

Soit  $Q'_n$  le produit des  $n$  premiers facteurs.  $Q'_n$  a la même limite que  $Q_n$ , à savoir  $Q$ .

Cela posé, prenons dans le 2<sup>e</sup> produit infini un certain nombre de facteurs,  $n$  par ex. dont le produit est  $P'_n$ ; prenons dans le 1<sup>er</sup> produit infini un nombre  $K$  de facteurs suffisant pour que  $P_K$  contienne tous les facteurs de  $P'_n$ ; et comparons la valeur absolue de  $(P_K - P'_n)$  à  $(Q_K - Q'_n)$

On verrait, par le même raisonnement que ci-dessus, que si l'on développe  $P_K$  et  $P'_n$ , tous les termes de  $P'_n$  sont dans  $P_K$ ; la différence  $(P_K - P'_n)$  est donc un polynôme entier à coefficients positifs. La différence  $(Q_K - Q'_n)$  se déduit de la précédente en remplaçant tous les termes par leurs valeurs absolues.

Donc:  $Q_K - Q'_n \geq |P_K - P'_n|$

Laissons  $n$  fixe et faisons croître  $K$  indéfiniment; on aura à la limite:  $|P - P'_n| \leq Q - Q'_n$

Faisons maintenant croître  $n$  indéfiniment;  $Q'_n$  tend vers la limite  $Q$ , donc le 2<sup>e</sup> membre tend vers 0; le 1<sup>er</sup> membre est essentiellement positif; donc il tend aussi vers 0, c'est-à-dire que  $P'_n$  a pour limite  $P$ .



38  
Théorème. Un produit infini absolument convergent ne peut être nul que si l'un de ses facteurs est nul.

Nous établissons d'abord cette propriété pour un produit où tous les termes  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  sont en valeur absolue inférieurs à 1. On sait que la série  $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| + \dots$  est convergente, et de plus que  $|a_n| < 1$ .

Formons le produit  $P_n$  et son inverse:

$$\frac{1}{P_n} = \frac{1}{1+a_1} \cdot \frac{1}{1+a_2} \cdot \frac{1}{1+a_3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1+a_n}$$
$$= \left(1 - \frac{a_1}{1+a_1}\right) \left(1 - \frac{a_2}{1+a_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{a_n}{1+a_n}\right)$$

Or la série:  $\left|\frac{a_1}{1+a_1}\right| + \left|\frac{a_2}{1+a_2}\right| + \left|\frac{a_3}{1+a_3}\right| + \dots$

est convergente, car <sup>si on la compare</sup> ~~comparée~~ à la série convergente  $a_n$ , le rapport des 2 termes correspondants est  $|1+a_n|$  qui a pour limite la limite. — Donc, quand  $n$  augmente indéfiniment, la quantité  $\frac{1}{P_n}$  tend vers une limite, et  $P_n$  tend aussi vers une limite non nulle. Le produit infini a donc une valeur différente de 0.

Nous allons maintenant démontrer le théorème dans le cas général. Supprimons la restriction:  $|a_n| < 1$ , mais supposons toujours la série  $|a_n|$  convergente. On sait que  $|a_n|$  tend vers 0 quand  $n$  augmente indéfiniment. Donc, à partir d'un rang  $k$ , ~~il se~~  $|a_n|$  est inférieur à 1. En vertu du lemme précédent, le produit infini



$(1+a_{r+1})(1+a_{r+2})(1+a_{r+3})\dots\dots\dots(1+a_{r+p})\dots\dots\dots$   
est convergent, et sa valeur est différent de 0. Désignons par  $S_p$   
le produit des  $p$  premiers facteurs; on a manifestement

$P_{r+p} = P_r \cdot S_p$  Si  $p$  croît indéfiniment,

$S_p$  tend vers la limite  $S$ , et  $P_{r+p}$  vers  $P_r \cdot S$ .  
Or  $S \neq 0$ , donc  $P_{r+p}$  ne sera nul que si le produit fini  
 $P_r$  est nul, ce qui exige qu'un de ses facteurs soit nul.

C'est la nécessité de conserver cette propriété fondamentale  
des produits finis qui fait qu'on ne considère que les produits  
infinis absolument convergents, et dont la limite est différente  
de 0.

Il est bon de remarquer une propriété commune à tous les  
produits infinis pour lesquels le produit des  $n$  premiers facteurs  
tend vers une limite: on a, en vertu de la loi de formation:

$P_{n+1} = P_n + a_{n+1} P_n$   $P_{n+1} - P_n = a_{n+1} P_n$

Cette relation récurrente permet d'exprimer  $P_n$  en fonction de  $P_1, P_2,$

$P_3$ , etc:

$$\begin{array}{rcl} P_2 - P_1 & = & a_2 P_1 \\ P_3 - P_2 & = & a_3 P_2 \\ P_4 - P_3 & = & a_4 P_3 \\ & \vdots & \\ P_n - P_{n-1} & = & a_n P_{n-1} \end{array}$$

Ajoutons  
membres à membres:

$$\begin{aligned} P_n &= P_1 + a_2 P_1 + a_3 P_2 + a_4 P_3 + \dots\dots\dots + a_n P_{n-1} \\ &= 1 + a_1 + a_2 P_1 + a_3 P_2 + \dots\dots\dots + a_n P_{n-1} \end{aligned}$$

Si  $P_n$  a une limite, le 2<sup>e</sup> membre tend vers la même limite, c.à.d. que la série :  $P_1 + a_2 P_1 + a_3 P_2 + a_4 P_3 + \dots + a_n P_{n-1}$  est convergente. Nous l'appellerons la série équivalente au produit infini.

Quand  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sont tous positifs, la série équivalente a tous ses termes positifs; elle est convergente si la série

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

est convergente.

Si les nombres  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sont quelconques et que la série  $a_n$  soit absolument convergente, la série équivalente sera convergente. Comparons en effet  $|a_n|$  à  $|a_n P_{n-1}|$  : le rapport des 2 termes correspondants est  $P_{n-1}$ , qui a une limite; donc la série  $|a_n P_{n-1}|$  est convergente.

22<sup>e</sup>

Séries à double entrée.

Considérons un système de 2 nombres entiers positifs  $(\alpha, \beta)$ , où  $\alpha, \beta$  peuvent prendre indifféremment toutes les valeurs

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

Deux systèmes de ce genre seront identiques si l'on a séparément :

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta'.$$

Ils seront différents si leurs éléments ne sont pas identiques ou si leur ordre diffère.

Théorème. A chaque ensemble  $(\alpha, \beta)$  de 2 nombres entiers positifs on peut faire correspondre un seul nombre entier, de



telle sorte que le système  $(\alpha, \beta)$  corresponde au seul nombre entier  $n$ ,  
 et inversement, que le nombre  $n$  corresponde au seul système  $(\alpha, \beta)$ ;  
 et que 2 systèmes différents correspondent à 2 nombres entiers  
 différents, et inversement, que 2 entiers différents correspondent à  
 2 ensembles différents. Une telle correspondance est dite  
univoque et réciproque.

La démonstration de cette proposition est presque intuitive  
 au point de vue géométrique.

Soit une table à double entrée;  
 on peut désigner chaque case,  
 soit par les 2 nombres qui indi-  
 quent respectivement l'ordre de  
 la file horizontale et de la colonne  
 verticale auxquelles appartient  
 la case, et qui la déterminent  
 par leur intersection; soit par  
 un numéro d'ordre linéaire.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	4	7	11	16	22	29	37	46
2	3	5	8	12	17	23	30	38	47	57
3	6	9	13	18	24	31	39	48	58	69
4	10	14	19	25	32	40	49	59	70	82
5	15	20	26	33	41	50	60	71	83	96
6	21	27	34	42	51	61	72	84	97	111
7	28	35	43	52	62	73	85	98	112	127
8	36	44	53	63	74	86	99	113	128	144
9	45	54	64	75	87	100	114	129	145	162

On voit que la correspondance ainsi établie est univoque & réciproque.  
 On peut d'ailleurs supposer que certains cas, en nombre fini ou  
 infini, restent vides, autrement dit exclure un certain nombre de  
 systèmes  $(\alpha, \beta)$  la correspondance réciproque n'en sera pas troublée.

On arrive à la même conclusion par des considérations  
 algébriques. Soit  $p$  un nombre entier positif; l'équation;  

$$x + y = p$$
 n'admet qu'un nombre fini de solutions entières et positives. On



38  
sera successivement  $p = 2, 3, 4, \dots$  et on rangera les systèmes de solutions de chaque équation de façon que  $x$  aille en croissant et  $y$  en diminuant; on formera ainsi la suite:

$$x+y=2 \quad (1, 1)$$

$$x+y=3 \quad (1, 2) (2, 1)$$

$$x+y=4 \quad (1, 3) (2, 2) (3, 1) \text{ etc.}$$

Il suffira ensuite de donner une numérisation d'ordre à chacun des systèmes de cette suite pour établir une correspondance univoque et réciproque entre ces systèmes et la suite des nombres entiers positifs.

On peut d'ailleurs supprimer tels systèmes qu'on voudra dans cette suite; la correspondance avec les nombres entiers subsistera -

Remarques. 1<sup>o</sup> En généralisant ce procédé, on pourrait de même ranger en une suite linéaire les solutions entières et positives des équations de la forme:  $x-y=p$   
 $x^2+y^2=p$   $xy=p$ , etc.

où l'on ferait  $p$  successivement égal à tous les nombres entiers positifs; on établirait ainsi autant de correspondances nouvelles entre la suite des nombres entiers et des systèmes de 2 nombres.

2<sup>o</sup> Tout nombre rationnel  $\frac{a}{b}$  peut être considéré comme l'ensemble de 2 nombres entiers  $a, b$  disposés dans un certain ordre. On voit que tous les nombres rationnels peuvent être rangés en une suite linéaire, de telle sorte qu'à chaque nombre



rationnel corresponde un nombre entier différent, et inversement.

3° On pourrait encore admettre des systèmes dont l'un des éléments serait nul, ou même tous les deux nuls.

Une série à double entrée est donnée quand chaque terme est déterminé par les deux indices dont il est affecté. Soit  $u_{\alpha, \beta}$  le terme général d'une telle série, il est supposé connu quand on donne  $\alpha$  et  $\beta$ .

Soit une série linéaire :  $v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots$

Si l'on pose :  $u_{\alpha, \beta} = v_n$

on établira entre les 2 séries une correspondance qui permet de ranger les termes de la 1<sup>re</sup> en une série linéaire, ou ceux de la 2<sup>e</sup> en un tableau à double entrée.

Supposons que les indices soient des nombres entiers positifs ou nuls. On dira que la série à double entrée  $u_{\alpha, \beta}$  est convergente si la somme d'autant de termes qu'on veut pris dans cette série reste inférieure à un nombre fixe. Si la série linéaire  $v_n$  admet une limite  $S$ , cette limite est la somme de la série à double entrée.

Pour établir cette proposition, nous démontrons d'abord que la série :  $u_{\alpha, 1} + u_{\alpha, 2} + u_{\alpha, 3} + \dots + u_{\alpha, \beta} + \dots$

est convergente, c.à.d. a une somme  $S_\alpha$  ; puis, que la série :

$$S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_\alpha + \dots$$

est convergente et a une somme qui est  $S$ .



Que la série:  $u_{\alpha,1} + u_{\alpha,2} + u_{\alpha,3} + \dots$  soit convergente,  
 cela est évident, car elle ne contient qu'une partie des termes  
 de la série linéaire  $v_n$ , qui a une limite. Elle adonc une  
 somme  $S_\alpha$  inférieure à  $S$ .

La série:  $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_\alpha + \dots$   
 est aussi convergente, car, soit  $\Sigma_{\alpha,\beta}$  la somme des  $\beta$  premiers  
 termes de la série  $u_{\alpha,1} + u_{\alpha,2} + u_{\alpha,3} + \dots$   
 et soit  $S_{\alpha,\beta} = \Sigma_{1,\beta} + \Sigma_{2,\beta} + \Sigma_{3,\beta} + \dots + \Sigma_{\alpha,\beta}$   
 $S_{\alpha,\beta}$  sera la somme des  $\alpha\beta$  premiers termes de la série à double  
 entrée, dont le 1<sup>er</sup> indice est au plus égal à  $\alpha$  et le 2<sup>e</sup> au plus égal  
 à  $\beta$ . — Elle est donc la somme des  $\alpha\beta$  premiers termes de la  
 série linéaire:  $v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots$

donc elle est inférieure à  $S$ .

Faisons croître  $\beta$  indéfiniment;  $\Sigma_{\alpha,\beta}$  tend vers  $S_\alpha$ , et  
 $S_{\alpha,\beta}$  vers la somme de la série à double entrée; or on aura  
 toujours:  $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_\alpha < S$   
 quel que soit  $\alpha$ , ce qui prouve que la série  $S_\alpha$  est convergente,  
 et que sa somme est au plus égale à  $S$ . — D'autre part, elle ne  
 peut être inférieure à  $S$ ; car soit  $S' < S$ , on pourra toujours  
 prendre dans la série linéaire, et par suite aussi dans la série  
 à double entrée, assez de termes pour que leur somme dépasse  $S'$ ;  
 c'est qu'on pourra déterminer des entiers  $\alpha$  et  $\beta$  assez grands



pour qu'on ait:  $S_{\alpha,\beta} > S'$ .

Donc la somme  $S_{\alpha,\beta}$  de la série à double entrée a pour limite  $S$  quand  $\alpha, \beta$  augmentent indéfiniment.

On représente généralement la somme  $S_\alpha$  par

$$\sum_{\beta=1}^{\beta=\infty} u_{\alpha,\beta} \quad \text{et } S \quad \text{par} \quad \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \sum_{\beta=1}^{\beta=\infty} u_{\alpha,\beta}$$

On aurait pu faire les mêmes raisonnements sur les séries linéaires formées par les colonnes verticales que sur les séries horizontales, et établir la convergence de la série

$$u_{1,\beta} + u_{2,\beta} + u_{3,\beta} + \dots + u_{\alpha,\beta} + \dots$$

puis de la série:  $S'_1 + S'_2 + S'_3 + \dots + S'_\beta + \dots$

on aurait ainsi:  $S = \sum_{\beta=1}^{\beta=\infty} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} u_{\alpha,\beta}$

Cette somme double est donc égale à la précédente; on la représente en abrégé par l'expression:

$$\sum_{\alpha=1, \beta=1}^{\alpha=\infty, \beta=\infty} u_{\alpha,\beta}$$

Le théorème précédent permet de grouper les termes d'une série infinie linéaire en séries ~~dont~~ <sup>infinies</sup> dont le nombre est infini.

- Réciproquement, si la série:  $u_{\alpha,1} + u_{\alpha,2} + \dots + u_{\alpha,\beta} + \dots$  est convergente, et a pour somme  $S_\alpha$ , et si la série  $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_\alpha + \dots$  est convergente et a pour somme  $S$ , la série linéaire correspondante est convergente et a pour somme  $S$ .

En effet, désiqu la série :  $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$   
est convergente et inférieure à  $S$ , la somme d'autant de termes  
qu'on voudra pris dans le tableau à double entrée et par suite  
dans la série linéaire sera inférieure à  $S$ ; donc la série  
linéaire est convergente; en appliquant le théorème direct,  
on voit que sa limite ne peut qu'être égale à  $S$ .

— On peut maintenant admettre des séries à termes imaginaires.

On dira que la série à double entrée à termes imaginaires est  
absolument convergente, si la série à double entrée formée par les valeurs  
absolues de ces termes est convergente, c.à.d. si la série linéaire  
formée par ces mêmes valeurs est convergente.

On démontrera, comme ci-dessus, que la série

$u_{\alpha,1} + u_{\alpha,2} + u_{\alpha,3} + \dots + u_{\alpha,\beta}$  est absolument convergente

puis que la série  $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_\alpha$  est  
absolument convergente et a pour limite la somme

$$S = |v_1| + |v_2| + |v_3| + \dots + |v_n| + \dots$$

Et d'abord, la série :  $u_{\alpha,1} + u_{\alpha,2} + u_{\alpha,3} + \dots + u_{\alpha,\beta} + \dots$   
est absolument convergente, car la série :

$|u_{\alpha,1}| + |u_{\alpha,2}| + |u_{\alpha,3}| + \dots + |u_{\alpha,\beta}| + \dots$  est convergente.

Soit  $S'_\alpha$  la somme. On a évidemment :  $|S_\alpha| \leq S'_\alpha$ .

Or la série :  $S'_1 + S'_2 + S'_3 + \dots + S'_\alpha$  est convergente,

donc à fortiori la série :  $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_\alpha$



est absolument convergente. Posons :

$$\Sigma'_{\alpha,\beta} = |u_{\alpha,1}| + |u_{\alpha,2}| + |u_{\alpha,3}| + \dots + |u_{\alpha,\beta}|$$

et :  $S'_{\alpha,\beta} = \Sigma'_{1,\beta} + \Sigma'_{2,\beta} + \Sigma'_{3,\beta} + \dots + \Sigma'_{\alpha,\beta}$

c'est la somme des valeurs absolues des  $\alpha\beta$  premiers termes du tableau, à double entrée, dont le 1<sup>er</sup> indice est au plus égal à  $\alpha$  et le 2<sup>e</sup> indice au plus égal à  $\beta$ .

Appelons  $S'$  la somme :  $S'_1 + S'_2 + S'_3 + \dots + S'_\alpha + \dots$   
c.à.d. la somme des valeurs absolues des termes de la série à double entrée. — Prenons dans la série linéaire  $v_n$   $n$  termes, et soit  $I'_n$  leur somme,  $I''_n$  la somme de leurs valeurs absolues.

$I'_n$  a pour limite  $S$ , et  $I''_n$  a pour limite  $S'$ .

Prenons les indices  $\alpha, \beta$  assez grands pour que les nombres  $v_1, v_2, \dots, v_n$  se trouvent parmi les termes de  $S_{\alpha,\beta}$ .  
 $S_{\alpha,\beta}$  contiendra alors tous les termes de  $I'_n$ , plus d'autres, dont la somme sera :  $(S_{\alpha,\beta} - I'_n)$ .

La somme de leurs valeurs absolues sera la différence :

$$S'_{\alpha,\beta} - I''_n \quad \text{et l'on aura certainement :} \\ |S_{\alpha,\beta} - I'_n| \leq S'_{\alpha,\beta} - I''_n$$

Le 2<sup>e</sup> membre est essentiellement positif. Si l'on fait croître  $\beta$  indéfiniment, les quantités  $\Sigma'_{1,\beta}, \Sigma'_{2,\beta}, \dots, \Sigma'_{\alpha,\beta}$  tendront vers  $S_1, S_2, \dots, S_\alpha$ .



Le même,  $\Sigma'_{1,\beta}, \Sigma'_{2,\beta}, \dots, \Sigma'_{\alpha,\beta}$  tendront vers  $S'_1, S'_2, \dots, S'_\alpha$ . L'inégalité précédente devient:

$$|S_1 + S_2 + \dots + S_\alpha - I_n| \leq S'_1 + S'_2 + \dots + S'_\alpha - I'_n$$

Augmentons maintenant  $\alpha$  indéfiniment:

$S_1 + S_2 + \dots + S_\alpha$  tendra vers  $\Sigma$ , somme inconnue de la série à double entrée;  $S'_1 + S'_2 + \dots + S'_\alpha$  tendra vers  $S'$ . On aura donc:

$$|\Sigma - I_n| \leq S' - I'_n$$

Si maintenant on fait croître  $n$  indéfiniment,  $I'_n$  tendra vers  $S'$ ; le 2<sup>e</sup> membre de l'inégalité tendra vers 0. Or le 1<sup>er</sup> membre est toujours positif; donc il a pour limite 0, c'est-à-dire que  $I_n$  a pour limite  $\Sigma$ ; or  $I_n$  a pour limite  $S$ ; ces 2 limites sont nécessairement égales:  $\Sigma = S$ .

Pour démontrer la réciproque, on supposera que les séries telles que:  $u_{\alpha,1} + u_{\alpha,2} + u_{\alpha,3} + \dots + u_{\alpha,\beta} + \dots$  soient absolument convergentes, et que la série de leurs sommes

$S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_\alpha + \dots$  est absolument convergente. On ne peut en conclure que la série à double entrée  $u_{\alpha,\beta}$  soit convergente. Il faut encore que, en désignant par  $S'_\alpha$  la somme des valeurs absolues des termes de  $S_\alpha$ , la série

$S'_1 + S'_2 + S'_3 + \dots + S'_\alpha + \dots$  soit convergente.



- Le théorème une fois démontré permet de grouper les termes par séries infinies en nombre infini dans les séries linéaires à termes imaginaires.

- Théorème Soient données 2 séries absolument convergentes :

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_\alpha + \dots$$

$$B = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_\beta + \dots$$

La série à double entrée :  $a_\alpha b_\beta$  est absolument convergente, et a pour limite  $AB$ .

Supposons d'abord que les nombres  $a_\alpha, b_\beta$  soient positifs. Considérons les termes d'indice  $\alpha$  dans la série à double entrée :

$$\text{on a : } a_\alpha b_1 + a_\alpha b_2 + a_\alpha b_3 + \dots + a_\alpha b_\beta + \dots = a_\alpha B$$

$$\text{Puis : } a_1 B + a_2 B + a_3 B + \dots + a_\alpha B + \dots = AB$$

La série à double entrée est donc convergente, et sa somme est  $AB$ .

- Le théorème s'étend aux séries à termes imaginaires, à la condition qu'elles soient absolument convergentes. En effet, dans ce cas, la série à double entrée

$|a_\alpha| \times |b_\beta|$  sera convergente, et conséquemment la série à double entrée  $a_\alpha b_\beta$  sera absolument convergente.

On pourra ranger les termes dans un ordre linéaire quelconque, la série ainsi formée sera aussi absolument convergente.

Rangons-les dans l'ordre suivant, que nous connaissons déjà :

$$a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_1 b_4 + \dots$$

Comme on peut remplacer autant de termes qu'on veut par



leur somme effectuée, la série précédente peut s'écrire:

$$C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n$$

en posant:

$$C_1 = a_1 b_1$$

$$C_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1$$

$$C_3 = a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1$$

$$C_n = a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_{n-1} b_1$$

Considérons les séries à double entrée dont le terme général est:

$u_{\alpha, \beta}$  On peut admettre que  $\alpha, \beta$  sont des entiers positifs, négatifs ou nuls. On pourra encore ranger les termes dans une suite linéaire infinie dans les 2 sens, et la série à double entrée sera convergente si la série linéaire est absolument convergente. [Supposons que les 2 séries:

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$a_{-1} + a_{-2} + a_{-3} + \dots + a_{-n}$$

soient convergentes, et soit  $\sum_n a_n$  la somme de leurs sommes.]

Si la série linéaire:  $\gamma_n$  est absolument convergente, on démontrera que les ~~séries~~ <sup>séries</sup> telles que  $\sum_p u_{\alpha, \beta}$  qui représentent les fils de termes d'indice  $\alpha$  entre les indices  $\beta$  et  $-\beta$ , sont absolument convergentes et ont une limite  $S_\alpha$ . Puis, on montrera que la série dont la somme est  $\sum_{\alpha} S_\alpha$  pour  $\beta = \pm \infty$  est absolument convergente et a pour limite la somme de la série  $\gamma_n$ . Comme cette somme  $\sum_{\alpha} S_\alpha$  a pour limite la somme de la série à double entrée pour  $\alpha = \pm \infty$ , on voit



que la série à double entrée a même somme que la série linéaire.

Une telle série  $u_{\alpha, \beta}$  peut être considérée comme la réunion de la séries à double entrée, distribuées dans les 4 quadrants du plan, et dans chacun desquelles les indices ont respectivement le même signe.

— Ces propriétés s'étendraient aisément aux séries à triple, quadruple, ..... entrée.

Par exemple, une série à triple entrée dont le terme général est  $u_{\alpha, \beta, \gamma}$  pourra être représentée par un espace à 3 dimensions.

On dira qu'elle est absolument convergente si la série linéaire formée des mêmes termes est absolument convergente. On le démontrera en formant successivement les sommes infinies

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} u_{\alpha, \beta, \gamma}$$

$$\sum_{\beta=1}^{\beta=\infty} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} u_{\alpha, \beta, \gamma}$$

$$\sum_{\gamma=1}^{\gamma=\infty} \sum_{\beta=1}^{\beta=\infty} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} u_{\alpha, \beta, \gamma}$$

— Disons un mot des produits à multiple entrée.

Soit un produit à double entrée dont le facteur général est

$$1 + u_{\alpha, \beta}$$

Si la série à double entrée dont

le terme général est  $u_{\alpha, \beta}$  est absolument convergente, on dira que le produit infini est absolument convergent.

On démontrerait pour les produits infinis des propositions analogues à celles qui concernent les séries.

On peut ranger les termes  $u_{\alpha, \beta}$  en un tableau, de manière à avoir des suites linéaires composées de termes de même indice. On formera les produits infinis ;

$$\prod_{\beta=1}^{\beta=\infty} (1 + u_{\alpha, \beta})$$

$$\text{puis } \prod_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \prod_{\beta=1}^{\beta=\infty} (1 + u_{\alpha, \beta})$$



23  
Nous n'avons jusqu'ici considéré que les séries et produits infinis à termes constants, c.à.d. dont les termes ne dépendent que de leur indice et sont déterminés dès qu'on le connaît.

— Nous examinerons maintenant le cas où  $u_1, u_2, \dots, u_n$  sont des fonctions d'une variable réelle ou imaginaire  $x$ , fonctions définies d'une façon univoque pour tous les points d'une certaine aire. Supposons que pour chacun de ces points la série :  $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$

soit convergente. La somme sera une fonction de  $x$  définie pour tous les points de l'aire considérée.

Dire que la série est convergente pour toutes les valeurs de  $x$  comprises dans l'aire donnée, c'est dire que, si l'on se donne une valeur de  $x$  prise dans cette aire, et un nombre positif  $\epsilon$ , on pourra trouver une valeur de  $n$  telle que pour tout  $p \geq n$  la somme  $R_p$  des termes au-delà du  $p^e$  est inférieure à  $\epsilon$  en valeur absolue :  $|R_p| < \epsilon$ .

Quand la valeur de  $x$  change,  $n$  change en général et il peut arriver qu'au voisinage de certains points  $n$  croisse indéfiniment (pour une même valeur de  $\epsilon$ .)

On dit qu'une série est uniformément convergente pour toutes les valeurs de  $x$  comprises dans une certaine aire, si à chaque nombre positif  $\epsilon$  on peut faire correspondre un entier  $n$  tel que, pour tout  $p \geq n$ , on ait :



49

$|R_p| < \varepsilon$  pour toutes les valeurs de  $x$  appartenant à l'aire considérée.

Une telle série représente la fonction qui en est la somme avec une approximation régulière qu'il est facile d'évaluer; on conçoit donc que les séries de cette espèce offrent un intérêt particulier. Les séries les plus maniables sont évidemment les séries absolument et uniformément convergentes.

On pourra affirmer qu'une série est absolument et uniformément convergente pour tous les points d'une aire donnée, si à chaque nombre positif  $\varepsilon$  on peut faire correspondre un entier  $p$  tel que, sous la condition:  $n' > n \geq p$ , on ait, pour toutes les valeurs de  $x$  prises dans l'aire donnée,

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + |u_{n+3}| + \dots + |u_{n'}| < \varepsilon,$$

En effet, si cette condition est vérifiée, 1° la série est absolument convergente, car la série  $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots$  est convergente.

2° La série est uniformément convergente; en effet, l'inégalité

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + |u_{n+3}| + \dots + |u_{n'}| < \varepsilon$$

ayant lieu quel que soit  $n'$ , si on fait croître  $n'$  indéfiniment, le 1<sup>er</sup> membre tendra vers  $R_n$ , et on aura:  $|R_n| < \varepsilon$ , sous la condition:  $n \geq p$ .

Il y a un cas très-général où l'on peut reconnaître immé-



diatement qu'une série est absol<sup>t</sup> et unif<sup>t</sup> convergente: c'est lorsque l'on a une suite de nombres positifs  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots$  formant une série convergente, et tels qu'on ait:  $|u_n| \leq a_n$  pour toutes les valeurs de  $x$  contenues dans l'aire

1<sup>o</sup> La série est manifestement absol<sup>t</sup> convergente pour toutes les valeurs de  $x$  considérées, en vertu du théorème connu.

2<sup>o</sup> Elle est aussi unif<sup>t</sup> convergente: en effet, on peut faire correspondre à chaque nombre positif  $\varepsilon$  un entier  $p$  tel que, à la condition  $n \geq p$ , on ait:

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots < \varepsilon \quad \text{On a donc}$$

a fortiori:  $|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + |u_{n+3}| + \dots < \varepsilon$ , c. q. f. d.

Théorème. Les séries dont les termes sont des fonctions de  $x$  continues pour toutes les valeurs de  $x$  situées à l'intérieur d'un contour simple, et uniformément convergentes pour ces mêmes valeurs, définissent des fonctions de  $x$  continues dans l'aire considérée.

En effet, à tout nombre positif  $\varepsilon$  on peut faire correspondre un autre nombre positif  $\eta$  tel que, sous la condition

$$|h| < \eta, \quad \text{on ait:}$$

$$|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon \quad f(x) \text{ étant la somme de la}$$

série; et  $x, (x+h)$  étant des valeurs comprises dans l'aire —

Soit  $S_n$  la somme des  $n$  premiers termes de la série et  $R_n$



la somme des restes:  $f(x) = S_n + R_n$ .

La série étant uniformément convergente, on peut trouver un entier  $n$  tel que:  $|R_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ , pour des valeurs de  $x$ .

D'autre part, les fonctions  $u_1, u_2, \dots, u_n$  étant continues, et leur nombre étant limité, leur somme est continue. On peut donc avoir:  $|S_n(x+h) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$  pour tout  $|h| < \eta$ .

$$\text{Or: } f(x+h) - f(x) = S_n(x+h) - S_n(x) + R_n(x+h) - R_n(x)$$

$$\text{Donc: } |f(x+h) - f(x)| \leq |S_n(x+h) - S_n(x)| + |R_n(x+h)| + |R_n(x)| \leq \varepsilon.$$

— Une autre propriété essentielle de ces séries est la suivante:

Considérons dans laire  $A$  un arc de courbe allant de  $x_0$  à  $x_1$ , que nous supposons décrit par le point mobile:

$$x = \varphi(t) + i\psi(t)$$

$\varphi$  et  $\psi$  étant des fonctions réelles et continues de la variable  $t$  entre  $t_0$  et  $t_1$ . — La fonction définie par la somme de la série,  $f(x)$ , a pour intégrale le long de ce contour  $C$ :

$$\int_C f(x) dx$$

$$\text{Or } f(x) \text{ a la forme: } f(x) = \Phi(t) + i\Psi(t)$$

$\Phi$  et  $\Psi$  étant des fonctions réelles; l'intégrale devient:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\Phi(t) + i\Psi(t)) (\varphi'(t) + i\psi'(t)) dt = \\ \int_{t_0}^{t_1} (\Phi(t)\varphi'(t) - \Psi(t)\psi'(t)) dt + i \int_{t_0}^{t_1} (\Phi(t)\psi'(t) + \Psi(t)\varphi'(t)) dt.$$



Ces 2 intégrales sont des fonctions réelles d'une variable réelle.  
Cela posé, la série:  $\int_C u_1 dx + \int_C u_2 dx + \int_C u_3 dx + \dots + \int_C u_n dx + \dots$   
est convergente, et sa somme est:

$$\int_C f(x) dx$$

Posons, comme tout à l'heure:  $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$ .

$S_n$  est une fonction continue de  $x$ , puisque c'est la somme d'un nombre limité de termes;  $R_n$  est aussi une fonction continue, car c'est la somme d'une série unif. convergente.

On a identiquement:  $\int_C f(x) dx = \int_C S_n(x) dx + \int_C R_n(x) dx$

$$\text{Or: } \int_C S_n(x) dx = \int_C u_1 dx + \int_C u_2 dx + \dots + \int_C u_n dx$$

Il suffit de prouver que  $\int_C R_n(x) dx$  tend vers 0 quand  $n$  croît indéfiniment; c'est-à-dire que le développement de  $\int_C S_n(x) dx$  a pour limite  $\int_C f(x) dx$  quand  $n = \infty$ .

Or on peut avoir, pour  $n$  suffisamment grand:

$$|R_n(x)| < \varepsilon$$

pour tous les points de laire et par suite de la courbe  $x_0 x_1$ . On a donc:

$$\int_C R_n(x) dx < \varepsilon S$$

$S$  étant la longueur de ce contour. On peut donc prendre  $n$  assez grand pour que

$$\left| \int_C R_n(x) dx \right| < \varepsilon$$



Théorie des séries ordonnées suivant les puissances entières et positives d'une variable réelle ou imaginaire, dites : séries entières en  $x$ .

Soient :  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  des nombres réels ou imaginaires. La série :  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$  est une série entière en  $x$  qu'on désignera par  $P(x)$ .

1er théorème d'Abel. Il existe une valeur  $x'$  de  $x$  telle que l'on ait, en désignant par  $A$  un nombre positif fixe,  $|a_n x'^n| < A$  quel que soit  $n$ , la série est convergente pour toutes les valeurs de  $x$  inférieures en valeur absolue à  $x'$ . (Autre énoncé : Lorsque les modules de tous les termes de la série restent finis pour une valeur  $x'$ , la série est convergente.)

— Soit  $\rho$  le module de  $x'$  ; prenons  $x$  tel que  $|x| < \rho$ .

La série :  $1 + \frac{x}{\rho} + \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{x^3}{\rho^3} + \dots + \frac{x^n}{\rho^n} + \dots$  sera absolument convergente, c'est à dire que la série

$$1 + \frac{|x|}{\rho} + \frac{|x|^2}{\rho^2} + \frac{|x|^3}{\rho^3} + \dots + \frac{|x|^n}{\rho^n} + \dots$$

est convergente ; car c'est une progression géométrique dont la raison est plus petite que 1. Si l'on multiplie le terme général de cette série par le nombre positif  $|a_n| \rho^n$ , on formera une série à termes positifs qui sera aussi convergente, et dont le terme général sera  $|a_n x^n|$ . Donc la série  $a_n x^n$  est absolument convergente.



Ainsi, si l'on décrit de l'origine comme centre un cercle de rayon  $r$ , la série  $P(x)$  sera absolument convergente pour toutes les valeurs de  $x$  situées à l'intérieur de ce cercle. Ce théorème ne nous apprend rien touchant les valeurs de  $x$  situées sur la circonférence.

— Supposons que la série  $P(x)$  soit convergente pour la valeur  $x'$  de  $x$ . Le terme général  $a_n x'^n$  tend vers 0 quand  $n$  croît indéfiniment. Il y aura donc sûrement un  $n$  positif  $A$  tel que:  $|a_n x'^n| < A$  pour toutes les valeurs de  $n$ .  
D'où ce corollaire du théorème d'Abel:

— Si la série est convergente pour une certaine valeur de  $x$ , elle sera absolument convergente pour toutes les valeurs de  $x$  inférieures à celles-là en valeur absolue.

Si l'on suppose que la série  $|a_0| + |a_1 x'| + |a_2 x'^2| + \dots$  est convergente; on a, pour toutes les valeurs de  $x$  dont le module est inférieur ou égal au module de  $x'$ ,

$$|a_n x^n| \leq |a_n x'^n|$$

Des lors, il est prouvé que la série  $P(x)$  est abs<sup>t</sup> et unif<sup>t</sup> convergente pour toutes les valeurs de  $x$  satisfaisant à l'inégalité;

$$|x| \leq |x'|$$

Donc, si l'on décrit de l'origine comme centre une circonférence passant par le point  $x'$ , la série sera abs<sup>t</sup> et unif<sup>t</sup> convergente



55  
pour tous les points du cercle et de la circonférence. La somme est une fonction continue de  $x$  pour cette aire et pour son contour.

Dans le cas où l'on a simplement:  $|a_n x^n| < A$ , la série est abs<sup>t</sup> convergente pour les points situés à l'intérieur de la circonférence qui passe par  $x'$ . Si l'on trace un cercle concentrique un peu plus petit, mais aussi voisin du 1<sup>er</sup> qu'on le voudra, la série sera abs<sup>t</sup> et unif<sup>t</sup> convergente pour tous les points de ce 2<sup>e</sup> cercle et de sa circonférence.

Cela posé, nous allons examiner les différents cas de convergence et de divergence.

Il peut arriver que la série soit convergente quel que soit  $x$ ; par ex: la série:  $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$  est absolument convergente pour toute valeur de  $x$ , c'est-à-d. dans tout le plan. Si l'on décrit un cercle de rayon quelconque autour de l'origine, la série est abs<sup>t</sup> et unif<sup>t</sup> convergente dans ce cercle et sur son contour, donc dans une partie quelconque du plan. La somme est ce qu'on appelle une fonction transcendante entière; elle est continue dans tout le plan.

— Il peut se faire que la série soit divergente pour toute valeur de  $x$ , sauf pour  $x = 0$ ; par ex:

$$1 + 1x + 1.2x^2 + 1.2.3x^3 + \dots + n!x^n + \dots$$

— Enfin une série peut être convergente pour certaines valeurs de  $x$



et divergente pour d'autres. Or nous savons qu'elle est convergente pour toutes les valeurs de  $x$  inférieures à ~~cette~~ en valeur absolue à celles qui la rendent convergente. Donc, si  $\rho$  est la plus grande des valeurs absolues de  $x$  qui la rendent convergente, elle sera convergente pour toutes les valeurs inférieures en valeur absolue à  $\rho$ , et divergente pour toutes les valeurs supérieures.

La quantité  $\rho$  est appelée le rayon de convergence de la série.

En effet, le cercle de rayon  $\rho$  ayant pour centre l'origine contient tous les points pour lesquels la série est abs<sup>t</sup> convergente, et elle est divergente pour tous les points extérieurs à ce cercle. Sur la circonférence même, elle peut être divergente ou convergente; mais si elle est absolument convergente en un point de la circonférence, elle sera abs<sup>t</sup> et univ<sup>t</sup> convergente pour tous les points de la circonférence (et du cercle). — Nous allons passer en

v. p. 62.

revue quelques exemples de ces différents cas.

— 1<sup>o</sup> Considérons la série:  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$

Pour  $x = 1$ , tous les termes sont égaux à 1, et restent inférieurs à un nombre positif quelconque supérieur à 1.

Donc, en vertu du théorème d'Abel, la série est convergente pour toutes les valeurs de  $x$  dont le module est inférieur à 1.

Elle est divergente pour le point  $x = 1$ , et aussi pour tous les points où  $|x| = 1$ . (points du cercle de rayon 1.)

En effet, posons  $x = \cos \varphi + i \sin \varphi$



On a par la formule de Moivre:

$$x^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

$x^n$  ne peut tendre vers 0, car son module  $\sqrt{\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi}$  est constamment égal à 1.

— 2<sup>o</sup> La série:  $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$

est convergente pour tout  $x < 1$ . Pour  $x = 1$ , elle est divergente; mais pour  $x = -1$ , elle est convergente. On démontrerait qu'elle ~~est~~ est convergente en tous les points de la circonférence de rayon 1, sauf pour  $x = 1$ .

— 3<sup>o</sup> La série:  $1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots$

a pour cercle de convergence le cercle de rayon 1; et comme elle est absolument convergente pour  $x = 1$ , elle sera abs<sup>t</sup> et unif<sup>t</sup> convergente pour tous les points de la circonférence.

— Remarque Signalons un cas fréquent dans les applications.

Soit la série:  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$

dans laquelle le rapport  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  tend vers une limite  $\rho$  quand  $n$  augmente indéfiniment. Dans ce cas, le rayon de convergence est  $\frac{1}{|\rho|}$ . En effet, le rapport:  $\frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|}$  tend vers  $|\rho x|$  quand  $n$  croît indéfiniment.

Si  $|x| < \frac{1}{|\rho|}$ , on a  $|\rho x| < 1$ . Dans ce cas, la série est convergente.  
Si  $|x| > \frac{1}{|\rho|}$ , le rapport tendant vers une limite supérieure à 1,



$a_{n+1} x^{n+1}$  ne peut décroître indéfiniment, donc la série diverge. Pour les valeurs de  $x$  dont le module est  $|\frac{1}{\rho}|$  (points situés sur la circonférence) on ne peut rien dire de la série.

**2<sup>e</sup> Théorème d'Abel.** Supposons que la série considérée soit convergente pour une valeur  $x'$  de  $x$ . D'après un corollaire du 1<sup>er</sup> théorème d'Abel, elle est uniformément et absolument convergente pour tous les points d'un cercle de rayon moindre que  $|x'|$ . Donc, pour tout point  $A$  situé sur la droite  $Ox'$  en deçà de  $x'$ , la série est abs<sup>t</sup> et unif<sup>t</sup> convergente. Cela posé, on va démontrer que la série est uniformément convergente pour tous les points de la droite  $Ox'$ , y compris  $x'$ .

Autre énoncé: La somme de la série, quand  $x$  tend vers  $x'$  suivant le rayon  $Ox'$ , a pour limite la valeur de la série au point  $x'$ . — C'est une conséquence de la propriété indiquée dans le 1<sup>er</sup> énoncé, car si l'on prouve le théorème, la série sera une fonction continue de  $x$  le long du segment  $Ox'$ , donc elle a pour limite sa valeur au point  $x'$  quand  $x$  s'approche indéfiniment de  $x'$ .

Pour plus de simplicité, nous supposons que la valeur  $x' = 1$ , et nous démontrons le théorème pour ce cas particulier, en montrant qu'il implique tous les autres. En effet, si l'on pose :

$$x = x' \xi, \quad \text{on transforme la série en une autre série ;}$$
$$a_0 + a_1 x' \xi + a_2 x'^2 \xi^2 + a_3 x'^3 \xi^3 + \dots$$



entière en  $\xi$ , et convergente pour  $\xi = 1$ . D'ailleurs, comme la relation  $x = x'\xi$  définit une transformation par similitude par rapport à l'origine, quand  $x$  décrit le rayon  $Ox'$ ,  $\xi$  décrit le rayon  $O-1$ .

Supposons donc que la série  $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$  soit convergente; la série  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$  sera uniformément convergente pour  $0 < |x| < 1$ .

Cherchons la limite de la série  $a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots = R_n(x)$ . Désignons par  $r_n$  la valeur du reste de la série  $(a_n)$  limitée au  $(n+1)^{e}$  terme: on a:

$$a_n = r_n - r_{n+1} \quad a_{n+1} = r_{n+1} - r_{n+2} \quad \text{etc.}$$

$$R_n(x) = x^n [ (r_n - r_{n+1}) + (r_{n+1} - r_{n+2})x + (r_{n+2} - r_{n+3})x^2 + \dots ]$$

La quantité entre crochets est la différence entre les 2 séries:

$$r_n + r_{n+1}x + r_{n+2}x^2 + \dots$$

$$r_{n+1} + r_{n+2}x + r_{n+3}x^2 + \dots$$

uniformément convergentes, puisque  $r_{n+p}$  tend vers 0 quand  $p$  augmente indéfiniment. Cette différence peut se mettre sous la forme:

$$r_n - r_{n+1}(1-x) - r_{n+2}x(1-x) - r_{n+3}x^2(1-x) - \dots$$

$$= r_n - (1-x)(r_{n+1} + r_{n+2}x + r_{n+3}x^2 + \dots)$$

Or si l'on se donne un nombre  $\frac{\varepsilon}{2}$  aussi petit qu'on voudra, on peut fixer un entier  $p$  tel que, pour tout  $n \geq p$ , on ait;

$$|r_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$



Dans ce cas, on aura pour tout  $|x| < 1$ ,

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + |1-x| \left( \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}|x| + \frac{\varepsilon}{2}|x|^2 + \frac{\varepsilon}{2}|x|^3 + \dots \right)$$

la somme entre parenthèses est une progression géométrique dont la raison est  $x$ ; donc:

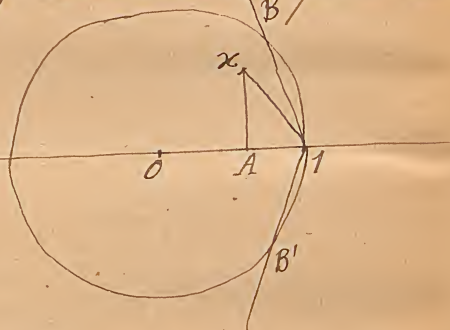
$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{|1-x|}{1-|x|}$$

Dans le cas où  $x$  est positif,  $|x| = x$ , on a:

$|R_n(x)| < \varepsilon$ , pour toutes les valeurs de  $x$  appartenant au rayon  $0-1$ , et inférieures à 1. Mais cela est encore vrai pour  $x=1$ , car on a alors:  $R_n(x) = r_n < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Il est donc établi que la série est unif<sup>te</sup> convergente pour tout l'intervalle  $0-1$ .

Soit maintenant le cercle de rayon 1; considérons un point  $x$  quelconque dans ce cercle;  $|1-x|$  est la droite qui le joint au p. 1.  $(1-|x|)$  est la projection de cette droite sur le arc des  $x$ . On voit que le rapport  $\frac{|1-x|}{1-|x|}$



reste fini pour tout point intérieur au cercle, c'à d. compris dans l'angle  $B1B'$ , plus petit que 2 droits. Cette démonstration géométrique n'est plus, en effet, pour le point  $x$  s'approchant indéfiniment de 1 suivant la circonférence.

Application: On sait qu'on peut écrire le développement en série:  $\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{4} + \dots$



pour  $x$  réel et plus petit que 1. On en conclut parfois à tort l'égalité:  $\log 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

Elle n'est légitime que lorsqu'on a démontré le 2<sup>e</sup> théorème d'Abel, c.à.d. quand on sait que la 1<sup>re</sup> série a pour limite la 2<sup>e</sup> quand  $x$  tend vers 1.

— Soient les séries:  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$   
 $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots$

convergentes pour  $x=1$ . Posons:  $A = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$   
 $B = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \dots$

Les 2 séries sont absolument convergentes pour tout  $|x| < 1$ .

Leur produit:  $a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) x^2 + \dots$

est convergent pourvu que  $|x| < 1$ . En effet, la série:

$$a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) + \dots$$

est convergente, et sa somme est égale au produit  $AB$ . Or on l'obtient en faisant  $x=1$  dans le produit des 2 séries en  $x$ .

Soient  $\phi(x)$ ,  $\psi(x)$  les sommes des 2 séries proposées. La 3<sup>e</sup> série aura une somme égale à  $\phi(x)\psi(x)$  pour toute valeur <sup>réelle</sup> de  $|x| < 1$ . Si l'on fait tendre  $x$  vers 1, en vertu du théorème

d'Abel,  $\phi(x)$  tend vers  $A$ ,  $\psi(x)$  tend vers  $B$ , donc

$\phi(x)\psi(x)$  tend vers  $AB$ . — Cette proposition est une extension de la règle de Cauchy sur le produit de 2 séries convergentes.



62  
Théorème. Soit une série entière en  $x$ :

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

absolument convergente pour une certaine valeur de  $x$  dont le module est  $\rho$ . Elle sera abs<sup>t</sup> et unif<sup>t</sup> convergente dans tout le cercle de rayon  $\rho$ . Supposons que sur la circonférence on ait:

$$|P(x)| \leq A \quad A \text{ étant un nombre positif quelconque.}$$

On va démontrer qu'on doit avoir:  $|a_n| \leq A \rho^{-n}$

$$\text{Posons en effet: } x = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\frac{P(x)}{\rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)} = \frac{a_0}{\rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)} + \frac{a_1}{\rho^{n-1} (\cos(n-1)\varphi + i \sin(n-1)\varphi)} + \dots$$

Les termes du 2<sup>e</sup> membre peuvent être considérés comme des fonctions de la variable réelle  $\varphi$ ; ils forment une série unif<sup>t</sup> convergente pour les valeurs de  $\varphi$ :  $0 < \varphi < 2\pi$ .

Pour ces mêmes valeurs, tous les termes sont des fonctions continues de  $\varphi$ . En vertu du théorème qui permet d'intégrer une série unif<sup>t</sup> convergente le long d'une courbe, nous pouvons intégrer cette série entre 0 et  $2\pi$ . Or le 1<sup>er</sup> membre est   
 en valeur plus petit que  $\frac{A}{\rho^n}$ ; donc l'intégrale de la série sera   
 en valeur plus petite que  $\frac{2\pi A}{\rho^n}$ .

Or dans cette intégrale entre 0 et  $2\pi$ ,  $\sin \varphi$  et  $\cos \varphi$ ,  $\sin n\varphi$  et  $\cos n\varphi$  deviennent nuls; il reste donc que le terme  $a_n$  dont l'intégrale est  $2\pi a_n$ ; on a donc  $|2\pi a_n| \leq \frac{2\pi A}{\rho^n}$

$$\text{on: } |a_n| \leq \frac{A}{\rho^n} = A \rho^{-n}.$$



Cette proposition peut se déduire aussi de la formule de Cauchy;

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{f(z)}{z-x} dz.$$

Corollaire. Si une série  $P(x)$  est convergente dans tout le plan (cà d. représente une fonction transcendante entière) et si l'on se donne un nombre positif quelconque  $A$ , on peut lui faire correspondre un nombre positif  $B$  tel que, pour des valeurs de  $x$  convenables et de module supérieur à  $B$ , le module de  $P(x)$  soit supérieur à  $A$ . — Autrement dit, une fonction transcendante entière ne peut, pour certaines valeurs de  $x$ , rester inférieure à un nombre positif  $A$ .

En effet, supposons que pour toutes les valeurs de  $x$ ,  $P(x)$  soit inférieure en valeur absolue à  $A$ . On aurait alors, pour une valeur quelconque  $|x| = \rho$ ,  $|a_n| < \frac{A}{\rho^n}$ .

Or  $\rho$  est pris aussi grand qu'on le veut; il faut donc que  $a_n = 0$ . Mais si  $a_n \neq 0$ , il faut que  $|P(x)| > A$  pour certaines valeurs de  $|x| > B$ .

Remarque. Cette propriété n'est pas vraie pour toutes les valeurs de  $x$  supérieures en valeur absolue à  $B$ , mais seulement pour quelques-unes; en quoi les séries entières en  $x$  diffèrent des polynômes entières en  $x$ .

— Le théorème précédent a plusieurs conséquences importantes. — Considérons une série entière convergente dans un cercle de rayon  $r$ ; elle est unif. convergente dans tous les cercles intérieurs et



concentriques à ce cercle; il est donc une fonction continue de  $x$ .  
Supposons  $a_0 \neq 0$ . Si on se donne un nombre positif quelconque  $\varepsilon$ , on pourra lui faire correspondre un nombre positif  $\eta$  tel que, si  $|x| < \eta$ , on ait:  $|P(x) - a_0| < \varepsilon$ .

En particulier, si  $\varepsilon < |a_0|$ ,  $P(x)$  ne peut s'annuler dans le cercle de rayon  $\eta$ . Donc, lorsque le 1<sup>er</sup> terme (indépendant de  $x$ ) n'est pas nul, on peut décrire autour de l'origine un cercle de rayon  $\eta$  où  $P(x)$  n'a pas de racine.

Supposons maintenant les  $n$  premiers coefficients nuls, et  $a_n \neq 0$ . On peut écrire:

$$P(x) = x^n (a_n + a_{n+1}x + a_{n+2}x^2 + a_{n+3}x^3 + \dots)$$

On pourra décrire autour de l'origine un petit cercle où la série entre parenthèses ne s'annule pas;  $P(x)$  s'annulera pour  $n$  valeurs de  $x$  égales à 0.

Si il y a un arc de courbe aboutissant à l'origine et sur lequel  $P(x)$  s'annule au voisinage de l'origine, la série est identiquement nulle;  $a_n = 0$  pour  $n$  quelconque.

Si 2 séries ont la même somme suivant un arc de courbe aboutissant à l'origine, elles sont identiques; car alors la série:

$$P(x) - Q(x) \text{ est identiquement nulle.}$$

— Théorèmes généraux sur des séries ou produits infinis dont les termes sont des fonctions de  $x$  pouvant être elles-mêmes représentées par des séries entières en  $x$ .



Soit :  $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$

une série dont chaque terme est la somme d'une série entière en  $x$  :

$$u_n = a_{n0} + a_{n1}x + a_{n2}x^2 + a_{n3}x^3 + \dots + a_{np}x^p + \dots$$

Nous supposons que la série à double entrée dont le terme général est :

$$a_{n,p} A^p$$

$A$  étant un nombre positif,

est convergente, quand  $n$  et  $p$  prennent toutes les valeurs :

$$0, 1, 2, 3, \dots$$

Alors la série à double entrée dont le terme général est :

$a_{n,p} x^p$  sera absolument convergente pour toutes les valeurs :

$$|x| \leq A.$$

Dans ce cas, toutes les séries particulières qu'on obtient en fixant  $n$  et en faisant varier  $p$ , ou en fixant  $p$  et faisant varier  $n$ , sont convergentes. Ainsi la série :

$$|a_{n0}| + |a_{n1}A| + |a_{n2}A^2| + |a_{n3}A^3| + \dots + |a_{np}A^p| + \dots$$

est convergente ; par suite la série  $u_n$  est abs<sup>t</sup> convergente pour tout  $|x| \leq A$ . — Désignons par  $V_n$  la somme de la

série  $|a_{n0}| + |a_{np}A^p|$  ; la série :

$$V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n + \dots$$

doit être aussi convergente, et elle a pour somme la somme de la série à double entrée :

$$a_{n,p} A^p$$

Réciproquement, si la série  $u_n$  reste convergente quand on remplace tous les coefficients par leurs modules et  $x$  par  $A$ , et si on appelle sa somme  $V_n$  ; si la série :

$$V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n + \dots$$



est convergente, la série à double entrée  $a_{np} x^p$  sera convergente.  
— Cela étant prouvé, il est clair que la série

$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$   
sera abs<sup>t</sup> et unif<sup>t</sup> convergente pour tout  $|x| \leq A$ .  
En effet, on a alors:  $|u_n| \leq v_n$

Or la série  $v_n$ , à termes constants et positifs, est convergente.  
Ainsi la série  $u_n$  représente une fonction continue de  $x$  pour tout le cercle de rayon  $A$ : soit  $q(x)$ .

Nous allons maintenant démontrer que la somme de cette série peut être représentée par une série entière abs<sup>t</sup> et unif<sup>t</sup> convergente dans le cercle de rayon  $A$ .

En effet, si l'on fait varier seulement  $p$ , on obtient la série partielle:  
 $u_n = a_{n0} + a_{n1} x + a_{n2} x^2 + a_{n3} x^3 + \dots + a_{np} x^p + \dots$

La somme de ces séries est:  $q(x) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$

Si l'on fait varier seulement  $n$ , on a:

$$a_{0p} x^p + a_{1p} x^p + a_{2p} x^p + \dots = x^p (a_{0p} + a_{1p} + a_{2p} + \dots)$$

La série entre parenthèses est convergente; soit  $B_p$  sa somme.  
La somme des séries de ce genre sera:

$$B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \dots = q(x).$$

Ainsi la série proposée est transformée en une série entière en  $x$  pour toutes les valeurs:  $|x| \leq A$ .

Les coefficients  $B_p$  sont les limites de séries à termes constants



dont l'indice  $p$  est constant et dont l'indice  $n$  prend toutes les valeurs :  $0, 1, 2, 3, \dots$ . La somme des  $(n+1)$  premiers

termes de  $B_p$  serait le coefficient de  $x^p$  dans la somme limitée

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Donc, pour former  $q(x)$  en série entière, on peut ajouter les  $(n+1)$  premiers termes, et ordonner la somme suivant les puissances croissantes de  $x$ , puis on fera croître  $n$  indéfiniment. Ce procédé est celui qu'on emploie pour les polynômes entiers en  $x$ , dont le nombre des termes est limité.

— Si on suppose seulement que les séries qui représentent  $u_n$  soient convergentes pour tout  $|x| \leq A$ , et si la série  $q(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$  est convergente pour les mêmes valeurs de  $x$ , on peut affirmer que, pour tout  $|x| < A$ , on peut remplacer  $q(x)$  par une série entière en  $x$ .

— Les produits infinis donnent lieu à un théorème tout à fait analogue, puisqu'un produit infini peut s'exprimer par une série équivalente.

Considérons le produit infini :  $(1+u_0)(1+u_1)(1+u_2)\dots(1+u_n)\dots$   
Supposons que :  $u_n = a_{n0} + a_{n1}x + a_{n2}x^2 + \dots + a_{np}x^p + \dots$

et que  $u_n$  reste convergent quand on remplace les coefficients par leurs modules et  $x$  par  $A$ . Soit  $v_n$  ce que devient alors  $u_n$ .

Supposons que le produit infini :  $(1+v_0)(1+v_1)(1+v_2)\dots(1+v_n)\dots$  soit convergent. On va prouver que le produit proposé est absolument convergent pour tout  $|x| \leq A$ .



En effet, si l'on désigne par  $P_n$  le produit des  $(n+1)$  premiers facteurs, on a :

$$P_{n+1} = P_n + P_n u_{n+1} \quad \text{d'où :}$$

$$P_n = P_0 + P_0 u_1 + P_1 u_2 + P_2 u_3 + \dots + P_{n-1} u_n$$

Cette série, indéfiniment prolongée, est la série équivalente au produit infini.

Dans le cas présent, cette série satisfait aux conditions du théorème précédent ; car le terme général  $P_{n-1} u_n$  est convergent. En effet,  $P_{n-1}$  est le produit de  $n$  facteurs dont les 2<sup>es</sup> termes sont des séries entières en  $x$  abs. convergentes pour tout  $|x| \leq A$  (on formera ce produit par la règle de Cauchy) donc  $P_{n-1} u_n$  est une série ordonnée suivant les puissances croissantes de  $x$  et convergente pour tout  $|x| \leq A$ .

Supposons que dans toutes les séries  $u_n$  on remplace les coefficients par leurs valeurs absolues et  $x$  par  $A$ , on formera ainsi les séries  $V_n$ . Posons :  $Q_n = (1+V_0)(1+V_1)\dots(1+V_n)$

Si dans  $P_n$  on remplace les coefficients par leurs valeurs absolues et  $x$  par  $A$ , on aura une quantité positive qui ne pourra être supérieure à  $Q_n$ . - Si l'on effectue les mêmes substitutions dans  $P_{n-1} u_n$ , le résultat sera inférieur ou égal à

$Q_{n-1} V_n$ . Or on sait que la série :

$$Q_n = Q_0 + Q_0 V_1 + Q_1 V_2 + Q_2 V_3 + \dots + Q_{n-1} V_n$$

est convergente : donc la série équivalente au produit proposé, et



conséquent le produit <sup>infini</sup> lui-même est <sup>convergent</sup> infini pour  $|x| \leq A$ .

On peut appliquer la règle précédemment donnée pour trouver les coefficients de la série entière en  $x$  équivalente au produit infini. On prendra les  $(n+1)$  premiers termes, on en fera la somme qu'on ordonnera suivant les puissances croissantes de  $x$ , et on la prolongera indéfiniment. Or cette somme des  $(n+1)$  premiers termes de la série est équivalente au produit des  $(n+1)$  premiers facteurs du produit; on peut donc, par la règle de sommation des séries, effectuer le produit des  $(n+1)$  premiers facteurs, puis le prolonger indéfiniment.

Nous allons seulement chercher à déterminer le terme indépendant de  $x$  et le coefficient de  $x$ .

Le terme indépendant est:  $(1+a_{0,0})(1+a_{1,0})(1+a_{2,0})\dots\dots(1+a_{n,0})$   
cà d. un produit infini à termes constants.

Le coefficient de  $x$  est le même que dans le produit à termes limités:

$$(1+a_{0,0}+a_{0,1}x)(1+a_{1,0}+a_{1,1}x)\dots\dots(1+a_{n,0}+a_{n,1}x)$$

$$\text{cà d: } \frac{a_{0,1}}{1+a_{0,0}} + \frac{a_{1,1}}{1+a_{1,0}} + \frac{a_{2,1}}{1+a_{2,0}} + \dots\dots + \frac{a_{n,1}}{1+a_{n,0}}$$

Donc, dans le produit infini <sup>ordonné</sup> <sup>suivant les</sup> <sup>puissances</sup> croissantes de  $x$ :  $B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \dots\dots$

$$\text{on a: } B_0 = \prod_{n=0}^{\infty} (1+a_{n,0}) \quad B_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n,1}}{1+a_{n,0}}$$

Cette dernière série est absolument convergente.



25° Appliquons aux séries entières le théorème général que nous venons de démontrer. Soit la série :

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Supposons que cette série soit convergente à l'intérieur d'un cercle de rayon  $R$ . Considérons une valeur de  $x$  située à l'intérieur de ce cercle ; posons :  $|x| = X$ . Soit  $h$  une variable

réelle ou imaginaire, telle que :  $|h| \leq H < R - X$ . On a :

$|x+h| < R$  de sorte que  $P(x)$  est encore absolument convergent pour la valeur  $(x+h)$  ; on peut écrire :

$$P(x+h) = a_0 + a_1(x+h) + a_2(x+h)^2 + \dots + a_n(x+h)^n + \dots$$

Considérons  $x$  comme fixe et  $h$  comme variable. Cette série est absolument convergente pour tout  $|h| < H$ , car chaque terme est une série convergente, ou plutôt un polynôme limité.

Dans son développement remplaçons tous les coefficients par leurs valeurs absolues et  $h$  par  $H$ . C'est remplacer

$a_n$  par  $|a_n|$ ,  $x$  par  $X$ , et  $h$  par  $H$ .

On a évidemment :  $|a_n(x+h)^n| \leq |a_n|(X+H)^n$

Cette nouvelle série  $|a_0| + |a_1|(X+H) + |a_2|(X+H)^2 + \dots$

est convergente, ~~et~~ puisque :  $X+H < R$ .

Si l'on en développe les termes et qu'on ordonne suivant les puissances croissantes de  $H$ , on obtiendra une série à double entrée dont le terme général est :

$$\frac{1.2.3 \dots n}{1.2.3 \dots p.1.2.3 \dots (n-p)} X^p H^{n-p}$$



On calculera les coefficients des puissances successives de  $h$  comme il a été indiqué plus haut. — Dans le développement correspondant de  $P(x+h)$  suivant les puissances croissantes de  $h$ , le terme indépendant de  $h$  sera:  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = P(x)$ .

Le coefficient de  $\frac{h}{1}$  sera:  $a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots = P'(x)$ .

Le coefficient de  $\frac{h^2}{1.2}$  sera:  $1.2 a_2 + 2.3 a_3 x + 3.4 a_4 x^2 + \dots = P''(x)$ .

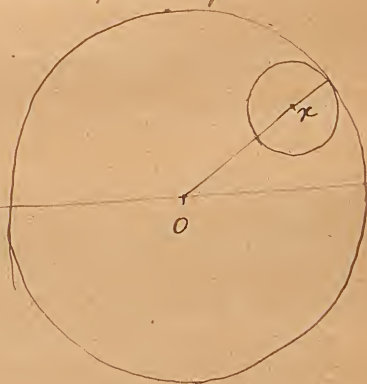
etc. de sorte qu'on aura le développement:

$$P(x+h) = P(x) + \frac{h}{1} P'(x) + \frac{h^2}{1.2} P''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} P^n(x) + \dots$$

Toutes les séries  $P_n(x)$  étant absolument convergentes pour les valeurs de  $x$  considérées — La formule précédente est d'ailleurs valable pour tout  $|h| < R - X$ .

Géométriquement,  $(R-X)$  est représenté par la partie du rayon  $Ox$  comprise entre  $x$  et la circ.

Les points  $(x+h)$  auxquels s'applique la formule précédente sont situés à l'intérieur d'un cercle ayant le p.  $x$  pour centre et tangent intérieurement au cercle  $O$  (cà d. ayant pour rayon  $(R-X)$ ).



Corollaire — La fonction  $P(x)$  admet des dérivées finies d'ordre quelconque à l'intérieur du cercle de convergence: en effet, on a:



$$\frac{P(x+h) - P(x)}{h} = P'(x) + \frac{h}{1.2} P''(x) + \dots$$

à qui prouve que le rapport qui figure au 1<sup>er</sup> membre a pour limite  $P'(x)$  quand  $h$  tend vers 0. Or cette limite est par définition la dérivée de  $P(x)$ , fonction d'une variable imaginaire. On prouverait de même que les dérivées successives sont  $P'(x)$ ,  $P''(x)$ ,  $\dots$ ,  $P^{(n)}(x)$ .

Il y a donc des dérivées de tous les ordres, et la formule précédente en donne l'expression en séries entières absolument convergentes à l'intérieur du cercle de convergence. On voit que ces séries entières en  $x$  s'obtiennent en prenant les dérivées terme par terme de la série  $P(x)$ .

La formule fondamentale que nous venons d'établir permet d'étendre à un point quelconque situé à l'intérieur du cercle de convergence certaines propriétés établies seulement pour le centre, qui est l'origine.

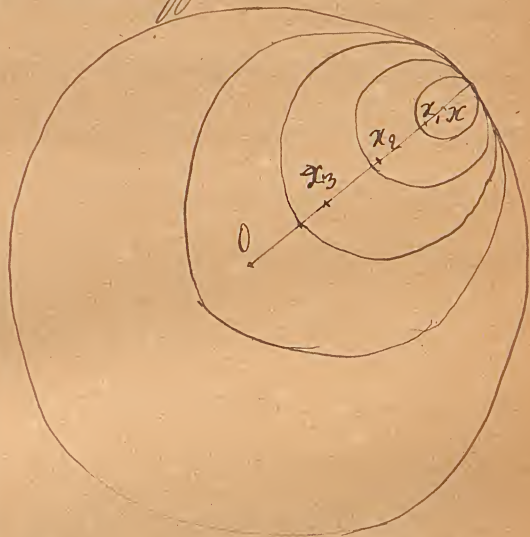
Si pour le point  $x$  la fonction  $P(x)$  n'est pas nulle, on pourra décrire de ce point comme centre un cercle de rayon assez petit pour que la fonction ne s'annule pour aucun point de ce cercle. Si  $P(x)$  s'annule pour le point  $x$  ainsi que ses dérivées successives jusqu'à la  $n^{\text{e}}$  exclusivement, elle aura un zéro d'ordre  $n$  en  $x$ , et on pourra décrire autour de ce point un cercle de rayon assez petit pour que la fonction ne s'y annule pas en dehors du centre.

Examinons si toutes les dérivées de  $P(x)$  peuvent s'annuler pour



un point du cercle de convergence. Comme la formule fondamentale s'applique à tout point  $(x+h)$  sous la condition  $|h| \leq H$ , on aurait:  $P(x+h) = P(x)$

ce qui que la fonction serait constante dans tout le cercle  $(x)$  de rayon  $(R-x)$ . Si ce cercle comprend l'origine, toutes les dérivées seraient nulles à l'origine, donc tous les coefficients de  $x$  seraient nuls. Si le cercle n'enferme pas l'origine, on prendra pour nouveau centre un point  $x_1$  contenu dans le petit cercle, puis s'il y a un point  $x_2$  contenu dans ce nouveau cercle, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on enferme l'origine dans un de ces cercles, ce qui a lieu après un nombre limité d'opérations. On prouverait



ainsi de proche en proche que les dérivées successives de  $P(x)$  doivent être toutes nulles pour  $x=0$ ; donc  $P(x)$  est identiquement nulle.

Corollaires. Si  $P(x)$  est nulle pour tous les points d'une courbe aboutissant au point  $x$ , elle est identiquement nulle.

Si 2 fonctions développées en séries entières en  $x$  sont égales pour tous les points d'une courbe contenue dans leurs cercles de convergence, elles sont identiques.

On a vu que toutes les dérivées de  $P(x)$  sont des séries <sup>absolument</sup> convergentes.



74  
dans le cercle de convergence de  $P(x)$ . On va prouver maintenant qu'elles ne peuvent être convergentes en dehors de ce cercle.

Soit en effet:  $|x'| > R$  — Si le terme général de  $P'(x)$ :  $na_n x^{n-1}$  tend vers 0,  $na_n x^n$  aussi tend vers 0, et a fortiori  $a_n x^n$ . Donc  $P(x)$  serait convergente pour des points extérieurs au cercle de convergence, ce qui est absurde. Il est donc démontré que toutes les dérivées ont même cercle de convergence que  $P(x)$ .

Sur la circonférence même, les dérivées peuvent être convergentes sans que la série le soit, au inversement. Par exemple, la série:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

est convergente pour  $x = -1$ , mais sa dérivée première ne l'est pas pour la même valeur.

— Problème de la continuation des séries. Soit la série:

$$P(x-x_0) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

Le point  $x_0$  joue le rôle d'origine; la série est par hypothèse convergente dans un cercle  $C_0$  qui a pour centre le point  $x_0$ .

Considérons un point de ce cercle, soit  $x_1$ . Posons:

$$x = x_1 + h, \quad \text{ou:} \quad x - x_0 = x_1 - x_0 + (x - x_1)$$

Appliquons la formule fondamentale à cette série:

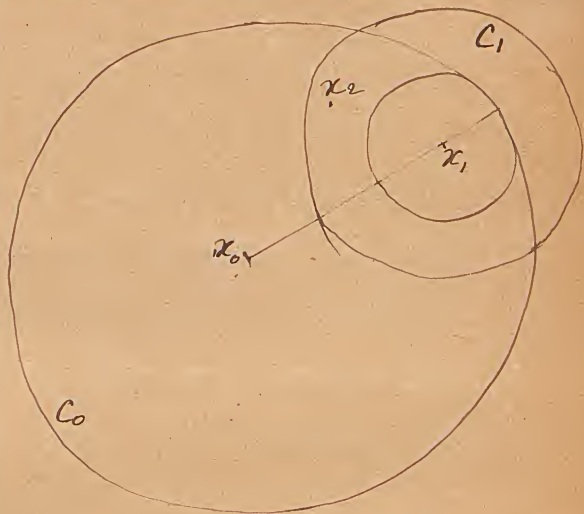
$$P(x-x_0) = P(x_1-x_0) + \frac{x-x_1}{1} P'(x_1-x_0) + \frac{(x-x_1)^2}{1.2} P''(x_1-x_0) + \dots$$

Nous remplaçons ainsi la série  $P(x-x_0)$  ordonnée suivant les



75

puissances de  $(x-x_0)$  par une série ordonnée suivant les  
 puissances de  $(x-x_1)$ ; ~~qui est convergente~~ et cette substitution  
 est valable pour tous les points situés dans le cercle de centre  $x_1$   
 et tangent intérieurement au  
 cercle  $C_0$ . Or il se peut que cette  
 nouvelle série ait un cercle de con-  
 vergence  $C_1$  qui dépasse  $C_0$ . La  
 fonction  $P(x-x_0)$  n'est définie  
 que dans  $C_0$ ; la fonction  $P(x-x_1)$   
 est identique à la précédente,  
 d'abord pour tous les points du  
 cercle de centre  $x_1$  tangent à  $C_0$ ,  
 puis pour tous les points communs aux 2 cercles  $C_0, C_1$ . (On relirait  
 en effet un point quelconque  $x_2$  de l'aire commune aux 2 cercles  
 au point  $x_1$  par une série de cercles tangents intérieurement à  $C_0$ ,  
 comme ci-dessus.) — Or la série  $P(x-x_1)$  définit une fonction  
 continue de  $x$  dans tout  $C_1$ ; elle peut donc servir à continuer  
 la fonction  $P(x-x_0)$  en dehors de  $C_0$ , puisqu'elle se confond  
 avec elle dans  $C_0$ .



On conçoit que la fonction  $P(x-x_1)$  définie dans  $C_1$  puisse  
 être continuée à son tour en dehors de ce cercle par une 3<sup>e</sup> série,  
 et ainsi de suite; il nous suffit d'avoir indiqué le principe de cette  
 théorie —



76  
Nous pouvons étendre la notion de dérivée aux séries dont les termes sont des séries entières en  $x$ .

Considérons une fonction  $q(x)$  définie par la série:

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

dont les termes sont des séries entières en  $x$ :

$$u_n = a_{n0} + a_{n1}x + a_{n2}x^2 + a_{n3}x^3 + \dots + a_{np}x^p + \dots$$

Supposons que les conditions du théorème soient vérifiées, c'est-à-dire,  $A$  étant un nombre positif au moins égal à la plus grande des valeurs absolues des coefficients  $a_n$ , la série  $u_n$  doit rester convergente si l'on y remplace  $x$  par  $|x|$  et tous les  $a_n$  par  $A$ ; et si elle a pour somme  $V_n$ , la série:  $V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n + \dots$  doit être convergente.

Cela posé, la fonction  $q(x)$  est définie pour tous les points d'un cercle  $C$ . Elle peut être ordonnée suivant les puissances entières de  $x$ : c'est une série entière en  $x$ . Elle admet donc des dérivées de tous les ordres dans le cercle  $C$ , et ces dérivées peuvent s'obtenir en prenant les dérivées terme par terme dans la série  $q(x)$ ; on aura:  $q'(x) = u'_0 + u'_1 + u'_2 + \dots + u'_n + \dots$  et ainsi de suite pour les dérivées successives.

$$\text{Posons: } |x| = X \quad |h| \leq H < A - X$$

On a alors:  $|x+h| < A$ , ce qui permet d'écrire l'égalité;

$$q(x+h) = u_0(x+h) + u_1(x+h) + u_2(x+h) + \dots + u_n(x+h) + \dots$$



Considérons un terme quelconque de la série  $u_n(x+h)$  précédente.  
Puisque  $u_n(x)$  est une série entière en  $x$  convergente dans tout le cercle  $C$ , on a :

$$u_n(x+h) = u_n + \frac{h}{1} u_n' + \frac{h^2}{1.2} u_n'' + \dots \dots \dots \text{pour tout } |h| \leq H.$$

En outre, il est aisé de voir que si l'on remplace dans le développement de  $u_n(x+h)$  tous les termes  $u_n, u_n', u_n'', \dots$  par leurs valeurs absolues, et  $h$  par  $H$ , la série précédente reste convergente.

Désignons en effet par  $v_n(x)$  la série qu'on obtient en remplaçant dans  $u_n(x)$  tous les coefficients par leurs valeurs absolues.

On a :  $|u_n(x)| \leq v_n(X)$  Donc :  $|u_n'(x)| \leq v_n'(X)$   
et de même pour les dérivées suivantes. Si dans le développement de  $u_n(x+h)$  on remplace tous les termes par leurs valeurs absolues et  $h$  par  $H$ , on aura un résultat moindre que

$$v_n(X) + \frac{H}{1} v_n'(X) + \frac{H^2}{1.2} v_n''(X) + \dots \dots \dots = v_n(X+H)$$

Or :  $v_n(X+H) < v_n(A)$ , car la série  $v_n(x)$  a tous ses termes positifs, et on a posé :  $X+H < A$ . D'autre part :

$v_n(A) = V_n$ , donc le résultat est moindre que  $V_n$ .

Or la série :  $V_0 + V_1 + V_2 + \dots \dots \dots$  a tous ses termes positifs, donc la série :  $u_0(x+h) + u_1(x+h) + u_2(x+h) + \dots \dots \dots$  est convergente, et satisfait aux conditions d'existence des dérivées, à savoir : pour tout  $|h| \leq H$ , ses termes sont des séries convergentes, et si dans ces séries on remplace tous les coefficients par leurs valeurs



absolues et  $h$  par  $th$ , on obtient des séries convergentes. On peut donc ordonner la série  $\varphi(x+h)$  suivant les puissances croissantes de  $h$ ; On écrira:

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \frac{h}{1} \varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2} \varphi''(x) + \dots$$

en posant:  $\varphi'(x) = u'_0 + u'_1 + u'_2 + u'_3 + \dots$

ou en général:  $\varphi^{(n)}(x) = u^{(n)}_0 + u^{(n)}_1 + u^{(n)}_2 + u^{(n)}_3 + \dots$

D'où l'on conclut que les séries de cette espèce peuvent aussi se différencier terme par terme.

Il en est de même des produits infinis de la forme:

$$P(x) = (1+u_0)(1+u_1)(1+u_2) \dots (1+u_n) \dots$$

Sous les mêmes conditions imposées à  $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$

On pourra aussi écrire:

$$P(x+h) = (1+u_0[x+h])(1+u_1[x+h])(1+u_2[x+h]) \dots$$

en mettant dans les fonctions  $u_n$  la variable en évidence.

Quand on considère les facteurs de ce produit comme des fonctions de  $h$ , on a un produit infinis dont tous les termes sont des séries entières en  $h$ , et qui par suite peut être ordonné suivant les puissances croissantes de  $h$ . Le terme indépendant de  $h$  sera:

$$(1+u_0(x))(1+u_1(x))(1+u_2(x)) \dots = P(x)$$

On verra de même que le coefficient de  $h$  sera  $P'(x)$ , dérivée prise terme à terme; le rapport de ce coefficient au terme indépendant

sera:  $\frac{u'_0(x)}{1+u_0(x)} \times \frac{u'_1(x)}{1+u_1(x)} \times \frac{u'_2(x)}{1+u_2(x)} \times \dots = \frac{P'(x)}{P(x)}$



79  
d'où l'on conclut que la dérivée logarithmique d'un produit infini se prend comme la dérivée logarithmique d'un produit limité.

Fonctions transcendentes  
de variables imaginaires.

26

La plus importante des fonctions transcendentes est :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

série convergente dans tout le plan. On sait que toutes les dérivées sont égales à la fonction elle-même.

Théorème. L'expression :  $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$   
a pour limite la somme de la série précédente quand  $m$  croît indéfiniment.

On prouve d'abord cette proposition pour  $x$  réel,  $m$  entier et positif. On a par la formule du binôme :

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = 1 + \frac{x}{1} + \frac{1 - \frac{1}{m}}{1.2} x^2 + \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)}{1.2.3} x^3 + \dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{p-1}{m}\right)}{1.2.3 \dots p} x^p + \dots$$

Les numérateurs des coefficients de  $x$  vont en augmentant quand  $m$  croît, et restent inférieurs à 1. Les termes de ce développement sont respectivement moindres que ceux de la série ;

$$q(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

En outre, il augmente constamment quand  $m$  augmente ; donc il a une limite inférieure ou au plus égale à  $q(x)$ .

Soit  $p$ , un entier quelconque fixe, et plus petit que  $m$ . Considérons les  $(p+1)$  premiers termes du développement de  $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$  —



80  
 Quand  $m$  augmente indéfiniment, ces termes ont pour limites respectives les  $(p+1)$  premiers termes de la série  $\varphi(x)$ ; d'ailleurs  $(1 + \frac{x}{m})^m$  est plus grand que la somme de ces  $(p+1)$  premiers termes; donc la limite de  $(1 + \frac{x}{m})^m$  est supérieure à la somme des  $(p+1)$  premiers termes de  $\varphi(x)$ , et cela quel que soit  $p$ ; donc elle est égale à  $\varphi(x)$ .

On étend ensuite ce théorème au cas où  $x$  est négatif ou imaginaire.  
 Formons la différence:  $\varphi^x - (1 + \frac{x}{m})^m$ . Le terme général du développement est:  $\left[1 - (1 - \frac{1}{m})(1 - \frac{2}{m}) \dots (1 - \frac{p}{m})\right] \frac{x^p}{p!}$

Ce développement a tous ses coefficients réels et positifs, donc il ne peut qu'augmenter si on y remplace  $x$  par sa valeur absolue  $p$ .

$$\left| \varphi(x) - (1 + \frac{x}{m})^m \right| \leq \varphi(p) - (1 + \frac{p}{m})^m$$

Or le 2<sup>e</sup> membre tend vers 0 quand  $m$  augmente indéfiniment; il en est de même du 1<sup>er</sup>, puisqu'il est essentiellement positif ce qui prouve que  $(1 + \frac{x}{m})^m$  a pour limite  $\varphi(x)$ .

— La série  $\varphi(x)$ , quand  $x$  est réel, a pour limite  $e^x$ .

Quand  $x$  est imaginaire, la somme de cette série est par définition  $e^x$ .

La règle de la multiplication des séries, appliquée au produit:

$$\varphi(x)\varphi(y) \text{ montre qu'on a: } \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y)$$

On peut donc écrire, pour  $x$  réel ou imaginaire;

$$e^x e^y = e^{x+y}$$

Dans le cas où  $x+y=0$ , on a:

$$e^x e^{-x} = 1.$$



81  
Ce qui montre que  $e^x$  ne s'annule pour aucune valeur réelle ou imaginaire de  $x$ .

Si l'on remplace  $x$  par  $xi$ , on aura le développement :

$$e^{xi} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$+ i \left( \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots - (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \right)$$

$x$  peut d'ailleurs être réel ou imaginaire.

Quand  $x$  est réel, ces 2 séries auxquelles se décompose le développement de  $e^{xi}$  représentent respectivement  $\cos x$  et  $\sin x$ ; elles peuvent servir à définir ces fonctions en dehors de toute considération géométrique. Comme elles sont convergentes dans tout le plan, elles seront par définition  $\cos x$  et  $\sin x$  quel que soit  $x$ .

On a donc:  $e^{xi} = \cos x + i \sin x$

$$e^{-xi} = \cos x - i \sin x$$

d'où:  $\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

Si l'on compare ces formules à celles du sinus et du cosinus hyperboliques:  $\text{Ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$\text{Sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

on voit que:  $\text{Ch} x = \cos xi$

$$\text{Sh} x = -\frac{\sin xi}{i}$$

Les formules d'addition des sinus et cosinus étalées pour l'argument réel sont encore vraies pour des arguments imaginaires.

Elles se déduisent des formules précédentes:

$$\cos(a+b) = \frac{e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}}{2} = \frac{e^{ia} \cdot e^{ib} + e^{-ia} \cdot e^{-ib}}{2}$$



$$\cos(a+b) + i\sin(a+b) = e^{i(a+b)} = e^{ia} \cdot e^{ib} = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b) \\ = (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + i(\sin a \cos b + \cos a \sin b)$$

Les formules de périodicité se déduisent aisément des formules d'addition et des valeurs de  $\cos x$  et  $\sin x$  pour les valeurs de  $x$  :  $\pi, \frac{\pi}{2}, k\pi, 2k\pi$ .

On étend ainsi toutes les formules de trigonométrie aux fonctions analytiques  $\sin x, \cos x$ , définies pour toutes les valeurs réelles et imaginaires de la variable. — On a par exemple :

$$e^{\pi i} = -1 \quad e^{2\pi i} = +1 \quad e^{x+2\pi i} = e^x \cdot e^{2\pi i} = e^x$$

ce qui montre que la période de la fonction  $e^x$  est  $2i\pi$ .

— La fonction  $e^x$  étant ainsi définie pour toutes les valeurs réelles et imaginaires de  $x$ , passons à la définition de la fonction inverse, qu'on désigne par  $\log x$ . Étant donné  $x$ , cherchons  $y$  tel que :

$$e^y = x$$

$$\text{Soit : } y = a + bi \quad e^y = e^a \cdot e^{bi} \quad e^{bi} = \cos b + i\sin b$$

$e^{bi}$  est une quantité imaginaire de module 1 et d'argument  $b$ .

$$\text{Posons : } x = \rho(\cos \alpha + i\sin \alpha) = \rho e^{i\alpha} \quad \text{Il faut qu'on ait :}$$

$$x = e^a \cdot e^{bi} \quad \text{d'où : } \rho = e^a \quad b = \alpha + 2k\pi.$$

$$\text{Donc : } \log x = \log \rho + i(\alpha + 2k\pi)$$

Ainsi toutes les valeurs du logarithme forment une progression arithmétique dont la raison est  $2i\pi$ .

Si l'on suppose déterminé l'angle  $\alpha$ , on aura d'une manière



également déterminée :  $\log x = \log p + i\alpha$

La valeur du logarithme sera donc déterminée dans les mêmes conditions que celle de l'argument de  $x$ .

Nous avons déjà étudié la fonction  $\log x = \log p + i\alpha$  et prouvé l'existence de sa dérivée. On pourrait l'établir au moyen du théorème des fonctions inverses, qui s'applique à celle-ci, pourvu qu'elle soit complètement définie. Cette dérivée doit être :

$$\frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

Pour définir d'une manière univoque et continue l'argument de  $x$ , on prendra pour coupure le demi-axe des  $x$  négatifs, et on conviendra de prendre  $\alpha = 0$  pour tout  $x$  réel positif, de sorte que

$\log x = \log p$ , c.à.d. le logarithme arithmétique de  $x$ .

Dans ces conditions, le logarithme de  $x$  est déterminé pour tous les points du plan, sauf ceux de la coupure ( $x$  réel négatif). Sa partie réelle est le logarithme de son module, et sa partie imaginaire est comprise entre  $+\pi i$  et  $-\pi i$ . Cette valeur ainsi définie s'appellera la détermination principale de la fonction.

Considérons la fonction :  $\log(1+x)$  pour  $|x| < 1$ .

L'argument de  $(1+x)$  sera compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $+\frac{\pi}{2}$  sous certaines conventions. C'est une fonction définie et continue dans l'intérieur du cercle de rayon 1 ayant pour centre l'origine, et notamment pour les valeurs réelles de  $x$  comprises entre  $-1$  et  $+1$ ; sa détermination principale coïncide



84  
d'ailleurs pour ces valeurs avec la valeur arithmétique de  $\log(1+x)$ .  
On sait qu'on a, pour ces valeurs;

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

On pourrait établir cette série pour  $x$  imaginaire comme pour  $x$  réel, en appliquant la formule de Taylor généralisée. D'ailleurs, si  $\log(1+x)$  peut être développé en série dans le cercle de rayon 1, ce n'est que par la série précédente, car elle doit cette fonction doit lui être identique pour les valeurs réelles de  $x$ .

— Passons à la fonction  $x^m$ ; ce sera par définition :

$e^{m \log x}$   
Si  $x$  est réel et positif et si  $m$  est réel, et qu'on adopte pour détermination principale de  $\log x$  sa valeur arithmétique,  $e^{m \log x}$  est alors égal à  $x^m$ , quantité réelle.

Dans tous les cas,  $x^m$  sera définie dans les mêmes conditions que  $\log x$ , c'est-à-dire que l'argument de  $x$ . Prenons sa dérivée par la règle des fonctions de fonctions; elle est égale à :

$$e^{m \log x} \times \frac{m}{x} = \frac{m x^m}{x} = m x^{m-1} = m e^{(m-1) \log x}$$

Le même pourvu que  $|x| < 1$ , l'argument de  $(1+x)$  est pleinement défini quand on l'assujettit à rester compris entre  $+\frac{\pi}{2}$  et  $-\frac{\pi}{2}$ . On a:  $(1+x)^m = e^{m \log(1+x)}$

la partie imaginaire du logarithme étant comprise entre  $+\frac{\pi i}{2}$  et  $-\frac{\pi i}{2}$ .

On peut appliquer la formule de Taylor généralisée par M. Darboux pour retrouver la formule du binôme pour toutes les valeurs



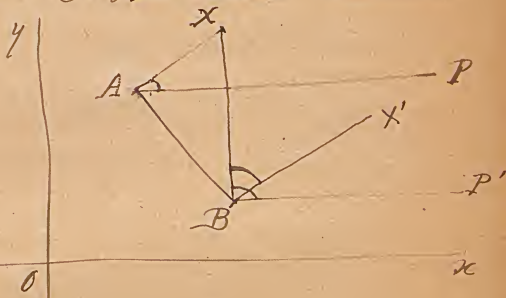
réelles et imaginaires de  $x$  et de  $m$ .

— Considérons encore la fonction :  $\log \frac{x-a}{x-b}$ .

Figurons les quantités  $a, b, x$ , par les points  $A, B, X$ .

La fonction est définie en même temps que l'argument de  $\frac{x-a}{x-b}$ .

On peut prendre pour valeur de cet argument la différence des arguments de  $(x-a)$  et de  $(x-b)$ . Si l'on mène comme coupe la droite  $AB$  prolongée au-delà de  $B$ , les arguments seront entièrement définis si l'on assujettit  $X$  à ne pas traverser cette coupe, et si l'on se donne la valeur de ces arguments pour un point quelconque non situé sur la coupe. — Menons  $AP$  parallèle à  $Ox$ ; l'argument de  $(x-a)$  est  $\widehat{PAX}$  décrit sans traverser la coupe, de  $P$  en  $X$ .



de  $(x-b)$  est  $\widehat{P'BX}$  décrit sans traverser la coupe, de  $P'$  en  $X$ . Menons  $BP'$  parallèle à  $Ox$ ; l'argument de  $(x-b)$  est  $\widehat{P'BX}$  décrit de même. L'argument de  $\frac{x-a}{x-b}$  sera la différence de ces 2 angles, c'est l'angle  $\widehat{XBX'}$  mesuré en faisant tourner une demi-droite mobile de  $BX$  à  $BX'$  parallèle à  $AX$ , sans traverser la coupe. Cet angle est moindre que  $\pi$ , car il est égal à l'angle  $\widehat{BXA}$  (décrit de  $B$  en  $A$ ) et de même sens. On peut donc prendre pour argument —  $\widehat{AXB}$  (décrit de  $A$  en  $B$ .)

On adoptera cette <sup>détermination</sup> définition pour l'argument du point  $X$  tant qu'il ne traversera pas la coupe. On peut d'ailleurs supprimer



86  
le prolongement de AB et ne traverser comme coupure que le segment AB. La fonction:  $\log \frac{x-a}{x-b}$  sera donc définie pour tous les points du plan, sauf ceux du segment AB.

Son expression sera:  $\log \frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} + i \widehat{BXA}$ .

Pour 2 points situés de part et d'autre de AB, les arguments  $\widehat{BXA}$  diffèrent très-peu de  $+\pi, -\pi$ , dont la partie imaginaire du log diffère à peu près de  $2i\pi$ . Ainsi, quand X traverse la coupure, le logarithme varie de  $2i\pi$ .

— Définition des fonctions circulaires inverses.

Soit:  $z = \arcsin x$  On doit avoir:  $x = \sin z$

$$x = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} \quad e^{zi} - e^{-zi} = 2ix \quad e^{2zi} - 2ixe^{zi} - 1 = 0.$$

$$e^{2zi} = ix \pm \sqrt{1-x^2} \quad \text{d'où: } z = \frac{1}{i} \log(ix \pm \sqrt{1-x^2})$$

Cette expression comporte deux indéterminations, celle du radical et celle du logarithme. On pourra définir sans ambiguïté la fonction  $z$  par des conventions convenables. Et d'abord, les 2 quantités  $(ix \pm \sqrt{1-x^2})$  ne s'annulent jamais, car elles sont finies et leur produit est égal à  $-1$ . Donc, si l'on fait varier  $x$  à une courbe quelconque ne passant ni par  $+1$  ni par  $-1$ , le logarithme ne passera pas par 0 et n'éprouvera aucune discontinuité. On fixera d'abord le sens du radical  $\sqrt{1-x^2}$ , qui dépend des arguments de  $(1+x)$  et de  $(1-x)$ ; une fois ces arguments déterminés, ils varient d'une manière



87

continue, pourvu que  $X$  ne passe ni par  $+1$  ni par  $-1$ : on pourra donc suivre le radical d'une façon continue. Supposons en outre qu'on ait fixé au point de départ l'argument de  $(ix \pm \sqrt{1-x^2})$ . Puisque cette quantité ne s'annule pas le long de la courbe décrite par  $X$ , on arrivera au bout de la courbe avec une valeur déterminée du logarithme sans solution de continuité.

Il s'agit maintenant de préciser: et d'abord, il faut définir  $\sqrt{1-x^2}$ . Il est naturel de prendre pour la valeur d'termination principale de cette racine, pour  $x$  réel compris entre  $-1$  et  $+1$ , la valeur arithmétique. Si l'on suit  $X$  le long d'une courbe partant d'un point réel compris dans cet intervalle et ne passant ni par  $+1$  ni par  $-1$ , le logarithme sera défini par continuité le long de cette courbe. Soient  $A, A'$  les 2 points  $+1$ , et  $-1$ ; adoptons pour coupures branchées  $x$  au-delà de ces 2 points. La racine est ainsi entièrement définie, en dehors des coupures, pour tous les points du plan. Quand on se donne la valeur de  $x$ , on sait trouver les 2 valeurs algébriques du radical; reste à savoir laquelle on doit choisir.

En général, quand on a:  $\sqrt{A+Bi} = X+Yi$ ,  
on sait que:  $A = X^2 - Y^2$        $B = 2XY$ .

Pour que  $X$  soit nul, il faut que  $B$  soit nul, et que  $A$  soit négatif.  
- Posons donc  $x = a+bi$ .       $1-x^2 = 1-a^2+b^2-2abi$ .  
La partie réelle de  $\sqrt{1-x^2}$  ne s'annule que si  $b=0$  et  $|a| > 1$ , c'à-d. si  $x$  est sur l'un des coupures. Donc,



si l'on assujettit  $\sqrt{1-x^2}$  à varier d'une façon continue, sans que  $x$  passe par les coupures, la partie réelle ne pourra changer de signe. Si de plus on prend pour détermination principale la valeur arithmétique de  $\sqrt{1-x^2}$  sur  $AA'$ , il faudra prendre dans tout le reste du plan celle des 2 valeurs dont la partie réelle est positive.

Chacune des 2 quantités  $(ix \pm \sqrt{1-x^2})$  étant ainsi définie, la partie réelle du logarithme sera parfaitement définie, puisqu'il est le logarithme de la valeur absolue de  $(ix \pm \sqrt{1-x^2})$ .

Reste à considérer l'argument, qui forme la partie imaginaire. Si l'on assujettit  $x$  à varier d'une façon continue, les arguments des 2 quantités  $(ix \pm \sqrt{1-x^2})$  varieront de même; et comme le produit de ces 2 quantités est égal à  $-1$ , la somme de leurs arguments est égale à  $(2k+1)\pi$ . Si l'on choisit les valeurs de ces arguments de manière que leur somme soit égale en un point à  $\pi$ , comme cette somme est elle-même continue, elle sera partout égale à  $\pi$ .

Supposons  $x$  réel et compris entre  $+1$  et  $-1$ ; il y a un angle  $\varphi$  compris entre  $+\frac{\pi}{2}$  et  $-\frac{\pi}{2}$ , et tel qu'on ait:

$$x = \sin \varphi \quad \sqrt{1-x^2} = \cos \varphi$$

Cet angle  $\varphi$  est arc sin  $x$ , au sens géométrique. On a:

$$ix + \sqrt{1-x^2} = i \sin \varphi + \cos \varphi$$

$$ix - \sqrt{1-x^2} = i \sin \varphi - \cos \varphi$$

On peut prendre  $\varphi$  pour argument de la 1<sup>re</sup> quantité, et



89

$(\pi - \vartheta)$  pour argument de la  $\mathcal{L}$ . Leur somme est alors égale à  $\pi$ , et elle sera constamment égale à  $\pi$  dans tout le plan.

Supposons maintenant  $x$  au-dessous de l'axe des quantités réelles, c'à-d.  $b < 0$ . La partie réelle de  $\sqrt{1-x^2}$  est positive; donc la partie réelle de  $(ix + \sqrt{1-x^2})$  est aussi positive. Un de ses arguments est donc compris entre  $+\frac{\pi}{2}$  et  $-\frac{\pi}{2}$ , comme quand  $x$  est sur  $AA'$ . L'argument de  $(ix - \sqrt{1-x^2})$  est également déterminé; il est compris entre  $(\pi - \frac{\pi}{2})$  et  $(\pi + \frac{\pi}{2})$ , c'à-d. entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{3\pi}{2}$ .

Supposons, en second lieu,  $x$  situé au-dessus de l'axe  $Ox$ ; c'à-d.  $b > 0$ . La partie réelle de  $ix$  sera négative, celle de  $\sqrt{1-x^2}$  ~~positive~~ <sup>positive</sup>; donc la partie réelle de  $(ix - \sqrt{1-x^2})$  est négative. Pour conserver la continuité d'un côté à l'autre de  $AA'$  et avec  $AA'$ , il faudra prendre pour argument de cette quantité la valeur comprise entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{3\pi}{2}$ . L'argument de  $(ix + \sqrt{1-x^2})$  sera alors compris entre  $(\pi - \frac{\pi}{2})$  et  $(\pi - \frac{3\pi}{2})$ , c'à-d. entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $-\frac{\pi}{2}$ . Donc, où que soit le point  $x$ , on devra prendre pour l'argument de  $(ix + \sqrt{1-x^2})$  la valeur comprise entre  $+\frac{\pi}{2}$  et  $-\frac{\pi}{2}$ , et pour celui de  $(ix - \sqrt{1-x^2})$  la valeur comprise entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{3\pi}{2}$ . C'est alors, la valeur de  $\mathcal{L} = \frac{1}{i} \log(ix \pm \sqrt{1-x^2})$  sera parfaitement déterminée; sa partie réelle (correspondant à la partie imaginaire du  $\log$ ) sera comprise



entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $-\frac{\pi}{2}$  pour la 1<sup>re</sup> solution, entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{3\pi}{2}$  pour la 2<sup>e</sup>.

Il existe donc une fonction continue:  $\arcsin x$ , entièrement définie dans tout le plan coupé par cette condition que  $x$  soit le sinus de cet arc, et telle que cet arc soit compris entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $-\frac{\pi}{2}$ ; il en existe une autre, définie dans les mêmes conditions, et égale à  $\pi - \arcsin x$ ; son sinus est encore  $x$ , et elle est comprise entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{3\pi}{2}$ .

La dérivée de l'une et l'autre fonction est encore  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  comme pour  $x$  réel,  $\sqrt{1-x^2}$  étant pris de manière que sa partie réelle soit positive.

En effet, si l'on calcule cette dérivée, on trouve:

$$\frac{1}{i} \left( \frac{i - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{ix + \sqrt{1-x^2}} \right) = \frac{1 + \frac{ix}{\sqrt{1-x^2}}}{ix + \sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- La fonction  $\arccos x$  se définirait d'une manière analogue.
- Étudions encore la fonction:  $z = \arctg x$  On doit avoir:

$$x = \tan z = \frac{1}{i} x \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}} \quad e^{zi}(1-ix) = e^{-zi}(1+ix)$$

$$e^{2zi} = \frac{1+ix}{1-ix} = \frac{i-x}{i+x} \quad z = \frac{1}{2i} \log \frac{i-x}{i+x}.$$

Nous sommes ainsi ramenés à une expression de la forme

$\log \frac{x-a}{x-b}$ , que nous avons déjà étudiée. En écrira

donc:  $z = \frac{1}{2i} \left( \log \frac{x-i}{x+i} + \log(-1) \right) \quad \log(-1) = \pi i.$



Soient  $B, B'$  les 2 points  $+i, -i$ . Si l'on prend pour coupure le segment  $BB'$ , la fonction  $\log \frac{x-i}{x+i}$  peut être définie d'une façon univoque dans le plan coupé. On peut prendre pour sa détermination principale:  $\log \frac{BX}{B'X} - i \widehat{BXB'}$

l'angle  $\widehat{BXB'}$  étant inférieur à  $\pi$ . On pourra prendre pour la valeur de  $z$ :

$$\frac{1}{2i} \left[ \log \frac{BX}{B'X} - i \widehat{BXB'} + \pi i \right]$$

Cette détermination concorde avec la valeur géométrique de arc tang  $x$  compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $+\frac{\pi}{2}$  pour  $x$  réel.

Supposons  $x$  réel et positif  $\log \frac{BX}{B'X} = 0$ . On a donc:

$$z = \frac{1}{2} (\pi - \widehat{BXB'})$$

Cet angle:  $\frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{BXB'}}{2}$  est la valeur géométrique de l'angle  $\widehat{BB'X}$ ;

on voit que  $z = \text{arc tang } x$  au sens géométrique — toutes les autres valeurs de  $z$  s'obtiennent

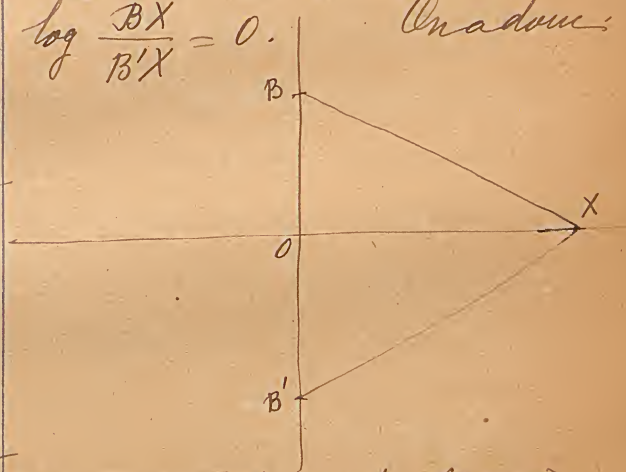
en ajoutant  $n\pi$  à la détermination principale, c'est-à-dire  $2n\pi$  à l'angle  $\widehat{BXB'}$  compris dans la parenthèse et multiplié par  $i$ .

On peut adopter comme définition générale de arc tang  $x$  la formule:

$$z = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \widehat{BXB'} + \frac{i}{2} \log \frac{BX}{B'X}$$

Quand  $x$  est <sup>réel</sup> négatif, l'angle  $\widehat{BXB'}$  est négatif, de sorte que

$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \widehat{BXB'}$  n'est plus l'angle géométrique  $\widehat{BB'X}$ : il est en





diffère <sup>anglément</sup> de  $\pi$ . C'était à prévoir: car si l'on part de  $x$  positif pour arriver à  $x$  négatif sans traverser la coupure, on ne trouve pas la même valeur qu'en suivant l'axe des  $x$ , qui traverse la coupure: or dans ce dernier cas on suit la détermination géométrique de:  $\arctan x$ .

Soit  $X$  du côté des  $x$  positifs, supposons que  $x$  aille de 0 en  $X$ , et qu'on parte de 0 avec la valeur 0 pour  $\arctan x$ , on pourra adopter pour <sup>cet arc</sup>  $X$  la définition:  $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \widehat{B'XB} + \frac{i}{2} \log \frac{BX}{B'X}$

qui se rattache par continuité à la valeur de  $\arctan x$  pour  $x$  réel et positif. — Si  $X$  est du côté négatif il faudra diminuer de  $\pi$  l'expression précédente, pour que  $\arctan x$  se relie encore par continuité aux valeurs qu'il prend pour  $x$  réel et négatif.

On peut même partir de l'origine avec la valeur 0 et suivre la coupure, pourvu qu'on n'aille ni en  $B$  ni en  $B'$ , où il y a discontinuité. — Remplaçons  $x$  par  $\xi i$ :

$$Z = \frac{1}{2i} \log \frac{i - \xi i}{i + \xi i} = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + \xi}{1 - \xi}$$

Le logarithme est réel; sa détermination principale s'annule pour  $\xi = 0$ . C'est de cette valeur qu'on partira pour définir  $\arctan x$  le long de  $BB'$ .



274

— Nous allons nous proposer de développer la fonction:  $\text{Sh } x$   
 en un produit infini. On sait qu'elle est égale à:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m - \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m}{2} \quad m \text{ entier \& positif}$$

Pour simplifier, nous supposons que  $m$  croisse par des valeurs impaires.  
 Le numérateur de la fraction est un polynôme entier en  $x$ , de degré  $(m-1)$  et il admet la racine 0; les autres racines peuvent être trouvées en résolvant une équation binôme. On peut donc le décomposer en un produit de facteurs binômes, ou l'on fera ensuite croître  $m$  indéfiniment. On obtiendra ainsi l'expression de  $\text{Sh } x$  en un produit infini.

Réolvons donc d'abord l'équation:  $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m - \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m = 0$

$$\left(\frac{1 + \frac{x}{m}}{1 - \frac{x}{m}}\right)^m = 1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi$$

$$\frac{1 + \frac{x}{m}}{1 - \frac{x}{m}} = \cos \frac{2k\pi}{m} + i \sin \frac{2k\pi}{m} = e^{\frac{2k\pi i}{m}}$$

$k$  devant prendre  $m$  valeurs entières consécutives, on pourra le faire varier de  $-\frac{m-1}{2}$  à  $+\frac{m-1}{2}$ .

$$1 - e^{\frac{2k\pi i}{m}} + \frac{x}{m} \left( e^{\frac{2k\pi i}{m}} + 1 \right) = 0$$

$$x = m \frac{e^{\frac{2k\pi i}{m}} - 1}{e^{\frac{2k\pi i}{m}} + 1} = m \frac{e^{\frac{k\pi i}{m}} - e^{-\frac{k\pi i}{m}}}{e^{\frac{k\pi i}{m}} + e^{-\frac{k\pi i}{m}}} = m \frac{i \sin \frac{k\pi}{m}}{\cos \frac{k\pi}{m}} = m i \tan \frac{k\pi}{m}.$$

Cette formule donne les  $m$  racines du polynôme  $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m - \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m$ .



Ce polynôme est pair, et d'ailleurs on voit que pour des valeurs égales et de signes contraires de  $k$ ,  $x$  prend des valeurs égales et de signes contraires. Donc, si l'on pose:  $x_k = m i \tan \frac{k\pi}{m}$ , et que l'on donne à  $k$  les valeurs, en nombre  $m$ :

$-\frac{m-1}{2}, -\frac{m-1}{2}+1, \dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots, \frac{m-1}{2}-1, \frac{m-1}{2}$ , on aura les  $m$  racines:

$$-x_{\frac{m-1}{2}}, \dots, -x_2, -x_1, 0, x_1, x_2, \dots, x_{\frac{m-1}{2}}.$$

(car pour  $k=0$ ,  $x=0$ ). On aura donc décomposé le polynôme en facteurs binômes du 2<sup>e</sup> degré:

$$\frac{\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m - \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m}{2} = A x \left(1 + \frac{x^2}{x_1^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{x_2^2}\right) \dots \left(1 + \frac{x^2}{x_{\frac{m-1}{2}}^2}\right)$$

Le coefficient  $A$  est facile à déterminer; c'est la limite, pour  $x=0$ , du rapport du 2<sup>e</sup> membre à  $x$ . Or la valeur limite du 1<sup>er</sup> membre est  $x$ ; donc  $A=1$ .

Puisqu'on donne à  $k$  les valeurs  $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{m-1}{2}$ , on a toujours:  $\frac{k\pi}{m} < \frac{\pi}{2}$ ,  $m \tan \frac{k\pi}{m} > k\pi$ , c'est-à-dire  $x_k > k\pi i$ . Quand  $m$  croît indéfiniment,  $x_k$  a pour limite  $k\pi i$ .

On est ainsi amené à penser que  $\prod x$  a pour expression la limite du produit infini que nous venons de définir. On va le démontrer rigoureusement.

Appelons  $\theta_m$  le produit des  $\frac{m+1}{2}$  premiers facteurs de ce dévelop-



perment; on aura identiquement:  $\Theta_m = \varphi_m \cdot \Psi_m$

en posant:  $\varphi_m = x \left(1 + \frac{x^2}{x_1^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{x_2^2}\right) \dots \dots \dots \left(1 + \frac{x^2}{x_p^2}\right)$

et:  $\Psi_m = \left(1 + \frac{x^2}{x_{p+1}^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{x_{p+2}^2}\right) \dots \dots \dots \left(1 + \frac{x^2}{x_{m-1}^2}\right)$

$p$  étant un entier positif fixe, et on pouvant croître indéfiniment.

$\varphi_m$  ayant un nombre fini de facteurs à pour limite, pour  $m = \infty$ :

$$x \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \dots \dots \dots \left(1 + \frac{x^2}{p^2\pi^2}\right)$$

$\Psi_m$  a aussi une limite, puisque c'est le quotient de  $\Theta_m$  et de  $\varphi_m$ .

Si l'on développait le produit  $\Psi_m$ , on aurait un polynôme dont le premier terme serait 1, et dont les autres termes seraient les puissances entières, positives et croissantes de  $x$ ; donc si l'on forme

$(\Psi_m - 1)$  c'est un polynôme entier en  $x$  sans terme constant.

Posons  $|x| = \rho$ . On aura:

$$|\Psi_m - 1| \leq \left(1 + \frac{\rho^2}{x_{p+1}^2}\right) \left(1 + \frac{\rho^2}{x_{p+2}^2}\right) \dots \dots \dots \left(1 + \frac{\rho^2}{x_{m-1}^2}\right)$$

Or:  $x_k > k\pi$ . Si l'on remplace  $x_k$  par  $k\pi$ , on diminue les dénominateurs, donc on augmente les facteurs et le produit:

$$|\Psi_m - 1| \leq \left(1 + \frac{\rho^2}{(p+1)^2\pi^2}\right) \left(1 + \frac{\rho^2}{(p+2)^2\pi^2}\right) \dots \dots \dots \left(1 + \frac{\rho^2}{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\pi^2}\right)$$

Or le produit infini dont le terme général est:  $\left(1 + \frac{\rho^2}{n^2\pi^2}\right)$  est convergent, puisque la série dont le terme général est  $\frac{\rho^2}{n^2\pi^2}$  est convergente. Donc si l'on se donne un nombre positif  $\varepsilon$ ,



on peut lui faire correspondre un entier positif  $p$ , tel que le produit d'autant de termes qu'on voudra pris au-delà du  $p^e$  diffère de 1 de moins de  $\varepsilon$ . On pourra alors écrire:  $\varphi_m = 1 + \varepsilon_p$

$$\text{et: } \varphi_m = x \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \dots \dots \dots \left(1 + \frac{x^2}{p^2\pi^2}\right) (1 + \varepsilon_p)$$

$|\varepsilon_p|$  tendant vers 0 quand  $p$  augmente indéfiniment; ce qui prouve que  $\varphi_m$  a pour limite, pour  $m = \infty$ , la valeur du produit infini:

$$x \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \dots \dots \dots \left(1 + \frac{x^2}{p^2\pi^2}\right) \dots \dots \dots$$

absolument convergent quel que soit  $x$ . On a donc bien:

$$\text{Sh } x = x \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \dots \dots \dots \left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \dots \dots \dots$$

$$\text{d'où: } \text{Sin } x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \dots \dots \dots \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \dots \dots \dots$$

$$\text{et: } \text{Sin } \pi x = \pi x \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right) \dots \dots \dots \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \dots \dots \dots$$

On peut se proposer de trouver un développement analogue pour  $\cos x$ . On pourrait remplacer  $x$  par  $\frac{\pi}{2} - x$  et effectuer la transformation.

Nous préférons employer la formule:  $\cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x}$

$$\cos x = \frac{2x \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{4\pi^2}\right) \dots \dots \dots \left(1 - \frac{4x^2}{n^2\pi^2}\right) \dots \dots \dots}{2x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \dots \dots \dots \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \dots \dots \dots}$$

Les facteurs qui contiennent les <sup>valeurs</sup> puissances paires de  $n$ , <sup>composent</sup> au numérateur, composent entièrement le dénominateur; celui-ci disparaît donc d'il reste:

$$\cos x = \left(1 - \frac{x^2}{\frac{\pi^2}{4}}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9 \frac{\pi^2}{4}}\right) \dots \dots \dots \left(1 - \frac{x^2}{(2k+1)^2 \frac{\pi^2}{4}}\right) \dots \dots \dots$$

$$\text{d'où: } \cos \pi x = \left(1 - \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}\right) \dots \dots \dots \left(1 - \frac{x^2}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2}\right) \dots \dots \dots$$



On voit que, parmi toutes les valeurs réelles et imaginaires de  $x$ ,  $\sin x$  ne s'annule que pour  $x = \pm n\pi$ . De même,  $\cos x$  ne s'annule que pour  $x = \pm \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ .

Ces formules mettent encore en évidence la périodicité des fonctions trigonométriques. Considérons par exemple  $\sin \pi x = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ .

$$g_n = x \left(1 - \frac{x}{1}\right) \left(1 - \frac{x}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{x}{1}\right) \left(1 + \frac{x}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

$$(n!)^2 g_n = x(1-x)(2-x) \dots (n-x)(1+x)(2+x) \dots (n+x)$$

$$(n!)^2 g_n(x+1) = (x+1)x(1-x)(2-x) \dots (n-x-1)(2+x) \dots (n+x+1)$$

Donc: 
$$\frac{g_n(x+1)}{g_n(x)} = \frac{n+x+1}{n-x}$$

Or, si  $n$  croît indéfiniment, la fraction a pour limite  $-1$ .

On en conclut: 
$$\sin \pi(x+1) = -\sin \pi x$$

$$\sin \pi(x+2) = \sin \pi x$$

Ainsi la fonction  $\sin \pi x$  a pour période 2, et la fonction  $\sin x$  a pour période  $2\pi$ .

On prouverait aisément par les mêmes formules:

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Les séries par lesquelles on a précédemment développé  $\cos x$  et  $\sin x$  ont fait ressortir certaines propriétés de ces fonctions, par exemple les formules d'addition, l'identité:  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ , les propriétés des dérivées et leur périodicité; les produits infinis que nous considérons maintenant en manifestent d'autres.



88  
M. Hermite en a déduit un procédé général pour construire des fonctions à double période.

Remarque. Nous avons ci-dessus décomposé  $q_n$  en facteurs du 1<sup>er</sup> degré; il faudrait bien regarder d'effectuer la même décomposition sur le produit infini, car les 2 produits ainsi obtenus ne seraient pas convergents. Si l'on prend les  $p$  premiers <sup>facteurs</sup> de la forme  $(1 - \frac{x}{n})$  et les  $q$  premiers facteurs de la forme  $(1 + \frac{x}{n})$ , on forme un produit dont la valeur dépend de  $p$  et de  $q$ . Si  $p = q$ , et qu'on les fasse croître indéfiniment, alors le produit a pour limite  $\sin \pi x$ , par exemple; mais si  $p$  et  $q$  croissent arbitrairement, le produit a <sup>une</sup> limite arbitraire; si le rapport  $\frac{p}{q}$  tend vers une certaine limite, le produit tend vers une limite qui dépend de la limite de ce rapport.

On peut transformer  $\frac{\sin \pi x}{\pi}$  en un produit infini de facteurs du 1<sup>er</sup> degré absolument convergent.

Le produit infini  $\prod (1 - \frac{x}{n})$  est divergent, mais le produit infini  $\prod (1 - \frac{x}{n}) e^{\frac{x}{n}}$  est convergent, car:  $(1 - \frac{x}{n}) e^{\frac{x}{n}} = 1 - \frac{x^2}{2n^2} - \dots$

$$\text{ou: } (1 - \frac{x}{n}) e^{\frac{x}{n}} - 1 = -\frac{x^2}{2n^2} - \dots$$

donc le produit infini  $\prod (1 - \frac{x}{n}) e^{\frac{x}{n}}$  est absolument convergent quel que soit  $x$ . On a par conséquent:

$$\frac{\sin \pi x}{\pi} = x \prod (1 - \frac{x}{n}) e^{\frac{x}{n}} \prod (1 + \frac{x}{n}) e^{-\frac{x}{n}} = x \prod (1 - \frac{x^2}{n^2}) e^{\frac{x}{n} - \frac{x}{n}}$$

en donnant à  $n$  toutes les valeurs entières positives et négatives (sauf 0.)

Le produit infini qui donne l'expression de  $\sin \pi x$  en facteurs



du 2<sup>e</sup> degré est absolument et uniformément convergent: tous ses termes sont convergents, puisqu'ils sont des binômes; et si A est un nombre positif fixe quelconque, la série:

$$\frac{A^2}{1^2} + \frac{A^2}{2^2} + \frac{A^2}{3^2} + \dots + \frac{A^2}{n^2} + \dots$$

est absolument convergente. Les conditions de transformation étant ainsi vérifiées, on peut mettre le produit infini sous la forme d'une série entière en x; et on pourra calculer les termes de la série en les identifiant aux termes du produit.

On peut aussi prendre la dérivée logarithmique comme dans un produit limite:

$$\frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} = \pi \cotg \pi x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{1^2 - x^2} - \frac{2x}{2^2 - x^2} - \dots - \frac{2x}{n^2 - x^2} - \dots$$

Or:  $-\frac{2x}{n^2 - x^2} = \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n-x} = \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}$  Donc:

$$\pi \cotg \pi x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=-n}^{p=+n} \frac{1}{x+p} \quad p \text{ pouvant prendre la valeur } 0.$$

Mais on ne peut prolonger la série  $\frac{1}{x+p}$  à l'infini, car elle est divergente. La série  $\left(\frac{1}{x+p} - \frac{1}{p}\right)$  est au contraire convergente absolument quel que soit x; on ne peut plus y faire p = 0.

On écrira donc:  $\pi \cotg \pi x = \frac{1}{x} + \sum \left(\frac{1}{x+p} - \frac{1}{p}\right)$

p prenant toutes les valeurs positives et négatives non nulles. Le même que tout à l'heure, le produit infini  $\prod \left(1 - \frac{x}{p}\right)$ , la série  $\sum_{p=-n}^{p=m} \frac{1}{x+p}$  ne tend vers aucune limite fixe. La somme dépend de la limite du rapport  $\frac{m}{n}$ , si cette limite existe.



100  
En effet, la somme:  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} - \log p$   
a pour limite la constante d'Euler quand  $p$  croît indéfiniment.  
Si l'on fait croître  $m$  et  $n$  séparément de telle sorte que le rapport  $\frac{m}{n}$  ait une limite, on voit que  $\sum \frac{1}{p}$  a pour valeur  $\log \frac{m}{n}$ .

Cette expression de  $\cotg x$  fait ressortir la périodicité de cette fonction.  
On obtiendrait d'une manière analogue le développement de  $\targ \pi x$ .

— Nous allons montrer comment on pourrait arriver directement à l'expression de  $\cotg x$ .

$$\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{m \rightarrow \infty} \theta_m$$

en posant:

$$\theta_m = i \frac{\left(1 + \frac{ix}{m}\right)^m + \left(1 - \frac{ix}{m}\right)^m}{\left(1 + \frac{ix}{m}\right)^m - \left(1 - \frac{ix}{m}\right)^m}$$

Le 2<sup>e</sup> membre est une fonction rationnelle en  $x$ ; on peut trouver les racines du dénominateur et décomposer la fraction en fractions simples; on aura  $\theta_m$  exprimé par une somme de fractions.

$$\left(1 + \frac{ix}{m}\right)^m - \left(1 - \frac{ix}{m}\right)^m = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\left(1 + \frac{ix}{m}\right)^m}{1 - \frac{ix}{m}} = 1.$$

$$\frac{1 + \frac{ix}{m}}{1 - \frac{ix}{m}} = e^{\frac{2k\pi i}{m}}$$

Supposons toujours  $m$  impair

$$1 + e^{\frac{2k\pi i}{m}} - \frac{ix}{m} \left(1 - e^{\frac{2k\pi i}{m}}\right) = 0.$$

$$x = \frac{m}{i} \times \frac{e^{\frac{k\pi i}{m}} - e^{-\frac{k\pi i}{m}}}{e^{\frac{k\pi i}{m}} + e^{-\frac{k\pi i}{m}}} = m \targ \frac{k\pi}{m}$$

$$\text{Posons: } x_k = m \targ \frac{k\pi}{m} > k\pi.$$



Remarquons que le numérateur de la fraction est d'un degré inférieur au dénominateur, car les termes en  $x^m$  se détruisent.

Cette fraction sera décomposée en  $m$  fractions simples de la forme :

$$\frac{B_k}{x - x_k} \quad \text{On obtiendra } B_k \text{ en remplaçant } x \text{ par } x_k \text{ dans la fraction :}$$

$$\frac{\left(1 + \frac{ix}{m}\right)^m + \left(1 - \frac{ix}{m}\right)^m}{\left(1 + \frac{ix}{m}\right)^{m-1} + \left(1 - \frac{ix}{m}\right)^{m-1}}$$

On doit avoir :  $B_k = B_{-k}$ , car cette fraction est une fonction paire de  $x$ . Pour  $x=0$ ,  $B_0 = 1$ ; la 1<sup>re</sup> fraction simple est donc :

$$B_k = \frac{\frac{1}{x} \left(1 + i \operatorname{tg} \frac{k\pi}{m}\right)^m + \left(1 - i \operatorname{tg} \frac{k\pi}{m}\right)^m}{\left(1 + i \operatorname{tg} \frac{k\pi}{m}\right)^{m-1} + \left(1 - i \operatorname{tg} \frac{k\pi}{m}\right)^{m-1}} = \frac{2 \cos k\pi}{\cos \frac{k\pi}{m} 2 \cos \frac{m-1}{m} k\pi}$$

$$= \frac{\cos k\pi}{\cos \frac{k\pi}{m} \cos \frac{k\pi(m-1)}{m}}$$

Réunissons les 2 fractions si  $k$  est égal et de signes contraires :

Donc :

$$\frac{B_k}{x - x_k} + \frac{B_k}{x + x_k} = \frac{2B_k x}{x^2 - x_k^2}$$

$$O_m = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{K=\frac{m-1}{2}} \frac{2x}{\cos^2 \frac{k\pi}{m} \left(x^2 - m^2 \operatorname{tg}^2 \frac{k\pi}{m}\right)}$$

On a identiquement :

$$\cos k\pi \frac{m-1}{m} = (-1)^k \cos \frac{k\pi}{m}$$

Quand  $m$  augmente indéfiniment,  $x_k = m \operatorname{tg} \frac{k\pi}{m}$  tend vers  $k\pi$ , et on retrouve la même formule que précédemment.

La démonstration rigoureuse de ce développement se fera comme pour  $\operatorname{Sh} x$ . On fixe un entier  $p$ , et on pose :  $O_m = f_m + \psi_m$





102

$$f_m = \sum_{k=0}^{K=p} \frac{2x}{\cos^2 \frac{k\pi}{m} (x^2 - x_k^2)}$$

Quand  $m$  augmente indéfiniment,  $\theta_m$  a pour limite  $\cotg x$ .

$f_m$  a pour limite:  $\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{K=p} \frac{2x}{x^2 - k^2\pi^2}$

Donc  $\psi_m$  a une limite; on va montrer que cette limite tend vers 0 quand  $p$  augmente indéfiniment. En effet, soit  $\rho = |x|$ ;  $x_k$  est réel positif; donc:  $|x^2 - x_k^2| = |\rho^2 - x_k^2|$

et comme  $x_k > k\pi$ ,  $|x^2 - x_k^2| > |\rho^2 - k^2\pi^2| = k^2\pi^2 - \rho^2$

Donc:  $|\psi_m| < \frac{1}{\cos^2 \frac{k\pi}{p+1}} \cdot \sum_{p+1}^{\infty} \frac{2\rho}{k^2\pi^2 - \rho^2} \quad m \geq p+1.$

La série  $\frac{2\rho}{k^2\pi^2 - \rho^2}$  est convergente. Donc on peut prendre  $p$  assez grand pour qu'on ait:  $|\psi_m| < \epsilon_p$

$\epsilon_p$  tendant vers 0 quand  $p$  augmente indéfiniment.

Nous avons ainsi établi la formule de développement:

$$\cotg x = \frac{1}{x} + \sum \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$$

On voit que la série  $\Sigma$  est absolument et uniformément convergente, abstraction faite des valeurs qui rendent la fraction infinie.

Bornons-nous aux valeurs de  $x$  telles que  $|x| < A < \pi$ ,

$(\pi - A)$  pouvant d'ailleurs être aussi petit qu'on veut.

Toutes les fractions  $\frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$  sont développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances croissantes de  $x^2$ .



$$\frac{1}{x^2 - n^2 \pi^2} = -\frac{1}{n^2 \pi^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}} = -\frac{1}{n^2 \pi^2} \left[ 1 + \frac{x^2}{n^2 \pi^2} + \frac{x^4}{n^4 \pi^4} + \frac{x^6}{n^6 \pi^6} + \dots \right]$$

$$= - \left[ \frac{1}{n^2 \pi^2} + \frac{x^2}{n^4 \pi^4} + \frac{x^4}{n^6 \pi^6} + \frac{x^6}{n^8 \pi^8} + \dots \right]$$

Série convergente quand on y fait  $x = A$ . Ainsi  $(\cotg x - \frac{1}{x})$  peut être développé suivant les puissances entières et positives de  $x^2$ . Désignons par  $S_2$  la somme de la série convergente:

$$1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \text{ pour } 2 > 1.$$

on aura:  $\frac{1}{x} - \cotg x = 2x \left( \frac{S_2}{\pi^2} + \frac{S_4 x^2}{\pi^4} + \frac{S_6 x^4}{\pi^6} + \dots \right)$

série convergente pourvu que  $|x| < \pi$ .

Si l'on multiplie tous les termes de l'expression de  $\cotg x$  par  $\sin x$  développé en série, et si  $\cos x$  est aussi développé en série, on aura une identité entre cette série et la série obtenue en appliquant la règle de multiplication des séries. Les coefficients de  $x$  sont des nombres rationnels liés par des relations très-simples aux nombres de Bernoulli:

$$B_n = \frac{1.2.3. \dots . 2n \cdot S_{2n}}{2^{2n-1} \pi^{2n}}$$

Le  $n^e$  coefficient, c'est celui de  $x^{2n}$ , a en effet pour expression:

$$\frac{S_{2n}}{\pi^{2n}} - \frac{S_{2n-2}}{3! \pi^{2n-2}} + \frac{S_{2n-4}}{5! \pi^{2n-4}} - \dots + (-1)^n \frac{S_2}{(2n-1)! \pi^2}$$







Étude des courbes et des surfaces au moyen des séries.

28

On représente en général une courbe plane par une équation de la forme:  
$$f(x, y) = 0$$
entre ses 2 coordonnées. D'autre part, il est commode, en géométrie analytique, de concevoir une courbe comme définie, non par une relation entre ses 2 coordonnées, mais par ses coordonnées données en fonction d'un seul paramètre. De même, pour les courbes de l'espace, au lieu de les définir par 2 équations entre les 3 coordonnées, on peut exprimer ces coordonnées en fonction d'un seul paramètre; et pour les surfaces, au lieu de les définir par une relation entre les 3 coordonnées, on peut exprimer ces coordonnées en fonction de 2 paramètres variables. On a admis jusqu'ici que ces deux façons de concevoir et de définir analytiquement les figures étoient équivalentes. La démonstration rigoureuse de cette équivalence est nécessaire; elle repose sur la théorie des fonctions implicites. Nous ne ferons pas cette démonstration avec tous les développements qu'elle comporte; nous nous bornerons à quelques indications sur la méthode à employer.

Considérons une courbe plane définie par l'équation:

$$f(x, y) = 0$$

et un de ses points, c.à.d. un système de valeurs  $(x_1, y_1)$  vérifiant cette équation. Transportons l'origine en ce point; les anciennes coordonnées deviennent  $(x_1 + x), (y_1 + y)$ .



Développons  $f(x, y)$  ainsi transformée par la formule de Taylor. Si  $f(x, y)$  est un polynôme, le développement sera limité, donc toujours convergent. Sinon, et si  $f$  est une fonction continue de  $x$  et  $y$ , on pourra obtenir un développement convergent au moins pour certains systèmes de valeurs attribuées à  $x, y$ .

Les séries qui procèdent suivant les puissances entières et positives de plusieurs variables donnent lieu à des propositions analogues à celles qui concernent les séries dont les termes sont fonctions d'une seule variable. Ce sont des séries à double, triple, ..... multiple entrée.

Le théorème fondamental de Abel s'étend sans peine à ces séries. — Si pour un système de valeurs  $(x', y')$  tous les termes restent en valeur absolue inférieurs à un nombre fixe  $A$ , la série à double entrée reste convergente pour tous les systèmes de valeurs tels que :

$$|x| < |x'|, \quad |y| < |y'|.$$

On démontrerait ensuite que si la série à double entrée est absolument convergente pour un système de valeurs  $(x', y')$  elle est absolument convergente pour tout système de valeurs tel que :

$$|x| < |x'|, \quad |y| < |y'|.$$

Il suffit de comparer terme à terme les 2 développements.

— Supposons que la série obtenue en développant  $f(x, y)$  soit convergente pour des valeurs suffisamment petites de  $x, y$ . Supposons encore que dans cette série figure au moins un terme



du 1<sup>er</sup> degré, c'est que  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y_1}$  ne sont pas nuls à la fois.  
 (Ceci exclut l'hypothèse où le point  $(x_1, y_1)$  serait un point singulier.)  
 Par exemple, le coefficient de  $y$  n'est pas nul; divisons le développement par ce coefficient, et faisons passer  $y$  dans un membre:  

$$y = ax + \varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) + \dots$$

$\varphi_n$  étant un polynôme homogène du  $n^{\text{e}}$  degré en  $x, y$ .  
 La série étant par hypothèse absolument convergente, on peut  
 y grouper les termes dans l'ordre que l'on veut. — Si elle est  
 absolument convergente pour le système de valeurs  $(x', y')$   
 la série de même forme qu'on obtiendrait en remplaçant  
 $x$  par  $x'\xi$  et  $y$  par  $y'\eta$   
 serait convergente pour tous les systèmes de valeurs tels que:  

$$\xi \leq 1, \quad \eta \leq 1.$$

On peut donc toujours supposer que la série est convergente  
 pour :  $x = 1, y = 1$ , puisqu'on peut toujours la  
 ramener à ce cas par un changement de variables approprié.

On va démontrer l'existence d'une série entière en  $x$ , conver-  
 gente pour des valeurs inférieures à un certain limite, et telle  
 que substituée à  $y$  dans le développement de  $y$  elles satisfont  
 identiquement cette équation.

Il en résultera que pour des valeurs de  $x$  voisines de 0, l'équation  
 en  $y$  admet une racine dont l'expression sera la somme de la série  
 entière en  $x$ . D'ailleurs, il n'y a qu'une seule racine de cette équation



108  
voisine de 0. En effet, si l'on fait passer tous les termes dans le même membre:

$$0 = -y + ax + \varphi_2(x, y) + \dots$$

on voit que la dérivée par rapport à  $y$  tend vers  $-1$  quand  $x$  et  $y$  tendent vers 0. On peut donc  $y$  avoir 2 racines voisines de 0.

Supposons qu'en effet il existe une série entière en  $x$

$$y = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots$$

convergente pour  $x$  suffisamment petit, et qui substituée à  $y$  satisfasse identiquement l'équation. Si l'on opère cette substitution, on pourra ordonner le 2<sup>e</sup> membre suivant les puissances entières et positives de  $x$ ; on égalera les coefficients correspondants dans les 2 membres, et on aura ainsi la valeur des coefficients indéterminés  $\alpha$ . Posons par exemple:

$$\varphi_2(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

$$\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots = \alpha x + Ax^2 + B(\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^3 + \dots) + C(\alpha_1^2 x^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 x^3 + \dots) + \dots$$

d'où l'on tire:

$$\alpha_1 = \alpha$$

$$\alpha_2 = A + B\alpha_1 + C\alpha_1^2$$

$$\alpha_3 = \psi_3(\alpha_1, \alpha_2)$$

$$\alpha_n = \psi_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad \text{etc.}$$

Les fonctions  $\psi_n$  étant des polynômes entiers en  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$  du degré  $n$ . Ces formules déterminent  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  de proche en proche, ainsi la série, si elle existe, est absolument



déterminée et unique.

Par hypothèse, la série est absolument convergente pour  $x=1$ ,  $y=1$ ; donc les coefficients doivent tendre vers 0, et par suite rester inférieurs en valeur absolue à un nombre positif fixe  $M$ .

À la place de l'équation:  $y = ax + q_2(x, y) + \dots$

considérons l'équation:  $y = M(x + x^2 + xy + y^2 + x^3 + \dots)$

Le 2<sup>e</sup> membre n'est pas convergent pour  $x=1$ ,  $y=1$ , mais il l'est pour tout système de valeurs telles que  $|x| < 1$ ,  $|y| < 1$ .

On peut en obtenir aisément la somme dans ce dernier cas.

On sait en effet que la série:  $1 + x + x^2 + xy + y^2 + x^3 + \dots$   
est le produit des 2 séries:  $\begin{cases} 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \\ 1 + y + y^2 + y^3 + \dots \end{cases}$

La somme est donc égale à  $\frac{1}{(1-x)(1-y)}$

L'équation revient donc à celle-ci:  $y = M \left( \frac{1}{(1-x)(1-y)} - 1 - y \right)$

On peut essayer de satisfaire cette équation par une série de la forme:  $y = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \dots$

Il est manifeste que les coefficients  $\beta$  seront déterminés successivement par des relations analogues à celles qui déterminent les coefficients  $\alpha$ . On voit aussi que dans ces relations tous les termes sont positifs, et  $M$  remplace tous les coefficients  $A, B, C, \dots$ . Donc tous les nombres  $\beta$  sont positifs et plus grands que les valeurs absolues des nombres  $\alpha$  correspondants.



Il en résulte que, si la série  
est convergente, la série ;  
le sera également.

Il suffit donc de prouver qu'il y a une série convergente qui  
substituée à  $y$  satisfait l'équation:  $y = M \left( \frac{1}{(1-x)(1-y)} - 1 - y \right)$   
 $(1-y)y = M \left( \frac{1}{1-x} - 1 + y^2 \right)$   $(M+1)y^2 - y + \frac{Mx}{1-x} = 0$ .

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{M(M+1)x}{1-x}}}{M+1}$$

$$\sqrt{\frac{1 - (2M+1)^2 x}{1-x}}$$

Le numérateur peut être développé en série pourvu que:

$$|x| < \frac{1}{(2M+1)^2}$$

Le facteur  $\frac{1}{1-x}$  qui représente

Le dénominateur forme une série convergente pour  $|x| < 1$ .  
Donc l'expression de  $y$  est développable en série convergente  
à la seule condition:

$$|x| < \frac{1}{(2M+1)^2}$$

Cette série pourra être ordonnée  
suivant les puissances entières et positives de  $x$ ; et pour que  $y$   
s'annule en même temps que  $x$ , il faudra prendre le radical  
avec le signe -.

A plus forte raison la série:  $\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots$   
sera absolument convergente pour des valeurs suffisamment  
petites de  $x$ ; d'ailleurs elle satisfera à l'équation en  $y$ :  
 $y = \alpha x + q_2(x, y) + q_3(x, y) + \dots$



Cette série, dans les limites où elle est convergente, définit très-nettement la courbe aux environs du point  $(x_1, y_1)$ . En prenant pour origine successivement d'autres points voisins, on déterminerait de proche en proche un arc de courbe. On démontrerait aisément qu'on peut ainsi s'avancer sur une courbe jusqu'à ce qu'on rencontre un point singulier.

Dire que  $y$  s'exprime par une série entière en  $x$ , c'est dire que  $y$  et  $x$  sont fonctions d'un même paramètre.

Si le coefficient de  $y$  était nul, celui de  $x$  ne le serait pas, par hypothèse, et on pourrait par des opérations semblables exprimer  $x$  en série entière en  $y$ . Le raisonnement est donc valable tant que le point considéré n'est pas un point singulier.

— Remarquons que le coefficient de  $x$  dans la série qui exprime  $y$  est  $a$ , c'est-à-dire le même que de l'équation en  $x$  et  $y$ .

— Un raisonnement analogue s'appliquerait aux surfaces —  
 Considérons une surface définie par l'équation :

$$f(x, y, z) = 0,$$

et supposons tout d'abord qu'elle passe par l'origine, et que l'origine n'est pas un point singulier. Il y aura au moins un terme du 1<sup>er</sup> degré dans l'équation développée par la formule de Taylor. Si, par exemple, le coefficient de  $z$  n'est pas nul, on pourra diviser par ce coefficient, et on aura l'équation :

$$z = ax + by + \varphi_2(x, y, z) + \varphi_3(x, y, z) + \dots$$



le 2<sup>e</sup> membre étant une série que nous supposons abs<sup>t</sup> convergente.  
On démontrera l'existence d'une série de la forme:

$$z = ax + by + \psi_2(x, y) + \psi_3(x, y) + \dots$$

convergente pour des valeurs suffisamment petites de  $x$  et de  $y$ ,  
et qui, substituée à  $z$ , vérifie identiquement l'équation  
précédente.

Cette série définit sans ambiguïté la surface au voisinage  
de l'origine — Cela prouve qu'on peut déterminer la surface  
en exprimant  $x, y, z$  en fonctions de 2 paramètres variables.  
— Soit maintenant une courbe de l'espace définie comme  
l'intersection des 2 surfaces:  $f(x, y, z) = 0, \varphi(x, y, z) = 0$

Nous supposons toujours qu'elle passe par l'origine. On pourra  
remplacer ces 2 équations par 2 séries en  $x$  et  $y$ :

$$z = ax + by + \psi_2(x, y) + \psi_3(x, y) + \dots$$

$$z = \alpha x + \beta y + \chi_2(x, y) + \chi_3(x, y) + \dots$$

On peut les retrancher membre à membre:

$$0 = (a - \alpha)x + (b - \beta)y + (\psi_2 - \chi_2) + (\psi_3 - \chi_3) + \dots$$

Si un des 2 coefficients  $(a - \alpha), (b - \beta)$  n'est pas nul  
on pourra diviser tous les termes par celui-là, et on aura  
par exemple  $y$  exprimé par une série entière en  $x$ .

Si l'on porte cette valeur de  $y$  dans une des 2 premières séries,  
on aura l'expression de  $z$  par une série ordonnée suivant les  
puissances entières et positives de  $x$ , c'à d. qu'on aura exprimé



$y$  et  $z$  en séries entières en  $x$ .

Que signifie maintenant cette condition que les coefficients  $(a-\alpha)$ ,  $(b-\beta)$  ne soient pas nuls en même temps?

Soient  $x_1, y_1, z_1$  les coordonnées du point pris pour origine; les 2 développements des équations  $f$  et  $\varphi$  en séries de Taylor

sont:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x + \frac{\partial f}{\partial y_1} y + \frac{\partial f}{\partial z_1} z + \dots$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} x + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} y + \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} z + \dots$$

$$a = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial z_1}} \quad b = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y_1}}{\frac{\partial f}{\partial z_1}} \quad \alpha = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}} \quad \beta = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}}$$

On ne doit donc pas avoir simultanément:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial z_1}} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial y_1}}{\frac{\partial f}{\partial z_1}} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}}$$

Ainsi on pourra exprimer  $x, y, z$  en fonctions d'un même paramètre variable, à la condition que les 3 déterminants:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} - \frac{\partial f}{\partial z_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} - \frac{\partial f}{\partial z_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} - \frac{\partial f}{\partial y_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$$

ne soient pas nuls à la fois.

Dire que ces 3 déterminants sont nuls, c'est dire que les 2 surfaces dont l'intersection devrait être la courbe considérée sont tangentes au point  $(x_1, y_1, z_1)$ .



## 29 Définition de la tangente

Soit une courbe plane définie par ses coordonnées en fonction d'un paramètre variable;  $x = f(t)$   $y = \varphi(t)$   
 Soient 2 valeurs voisines de ce paramètre;  $t, (t+h)$ .  
 Les 2 quantités:  $f(t+h) - f(t)$ ,  $\varphi(t+h) - \varphi(t)$   
 considérées comme des paramètres directeurs définissent la direction qui va du point  $t$  au point  $(t+h)$ . Cette direction a le même sens que la droite qui joint l'origine au point dont les coordonnées sont:

$$\varphi(t+h) - \varphi(t), \quad f(t+h) - f(t)$$

Les paramètres directeurs:  $\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ ,  $\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}$   
 définissent évidemment la même direction. Quand on fait tendre  $h$  vers 0, le point  $(t+h)$  tend vers le point  $t$ , et les 2 paramètres directeurs ont pour limites respectives  $f'(t)$ ,  $\varphi'(t)$ . Ces 2 dérivées sont donc les paramètres directeurs de la tangente au point  $t$  dans le sens de  $t$  croissant.

Dans l'espace, soient  $x, y, z$  données en fonction d'un paramètre, leurs dérivées par rapport à  $t$  sont les paramètres directeurs de la tangente au point  $t$  dans le sens de  $t$  croissant.

Les cosinus directeurs se déduisent sans difficulté des paramètres directeurs.

Ainsi l'équation de la tangente à une courbe plane, au point  $(x, y)$  est:

$$\frac{X - x}{f'(t)} = \frac{Y - y}{\varphi'(t)}$$



ou encore:  $\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy}$

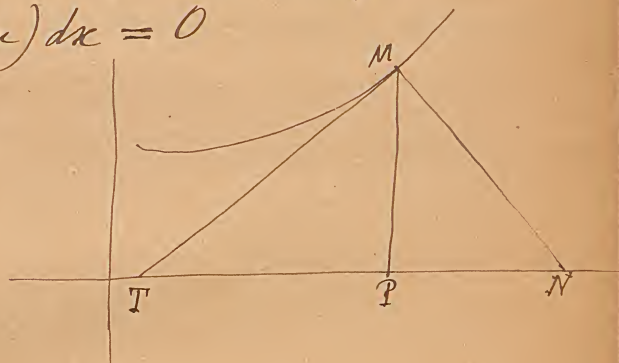
$dx, dy$  pouvant représenter soit les dérivées, soit les différentielles.  
Si  $y$  est fonction de  $x$ , soit  $y'$  sa dérivée par rapport à  $x$ ;

l'équation devient:  $Y-y = y'(X-x)$

L'équation de la normale (en coordonnées rectangulaires) est:

$$(Y-y) dy + (X-x) dx = 0$$

On sait calculer les formules  
de la sous-normale  $PN$  et  
de la sous-tangente  $PT$ .



Dans l'espace, les équations  
de la tangente sont de la forme:

$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz}$$

et l'équation du plan normal est:

$$(X-x) dx + (Y-y) dy + (Z-z) dz = 0.$$

Si la courbe plane est donnée par l'éq:  $f(x, y) = 0$   
 $dx, dy$  seront définies dans leur rapport par l'éq. différentielle:

$$f'_x dx + f'_y dy = 0 \quad \text{d'où:} \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{f'_x}{f'_y}$$

L'éq. de la tangente en  $(x, y)$  devient:

$$(X-x) f'_x + (Y-y) f'_y = 0.$$

Dans l'espace, soit la courbe définie par les équations:



$$f(x, y, z) = 0 \quad + \quad \varphi(x, y, z) = 0$$

Les équations différentielles:

$$f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz = 0$$

$$\varphi'_x dx + \varphi'_y dy + \varphi'_z dz = 0$$

donnent les rapports de  $dx, dy, dz$ , qu'on pourra porter dans l'équation de la tangente. Mais il est plus simple de remplacer dans ces équations  $dx, dy, dz$  par les quantités  $(X-x), (Y-y), (Z-z)$  qui leur sont proportionnelles: la tangente est donc définie par les équations:

$$\begin{cases} (X-x)f'_x + (Y-y)f'_y + (Z-z)f'_z = 0 \\ (X-x)\varphi'_x + (Y-y)\varphi'_y + (Z-z)\varphi'_z = 0 \end{cases}$$

Si, laissant ~~la~~ invariable la surface définie par la 1<sup>re</sup> équation:

$f(x, y, z) = 0$ , on fait varier la surface:  $\varphi(x, y, z) = 0$  qui coupe la 1<sup>re</sup> suivant différentes courbes passant par le point  $(x, y, z)$  la tangente à chacune de ces courbes sera toujours dans le plan:

$$(X-x)f'_x + (Y-y)f'_y + (Z-z)f'_z = 0$$

qu'on appelle pour cette raison le plan tangent à la surface

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{au point } (x, y, z.)$$

— Considérons maintenant une courbe plane définie en coordonnées polaires,  $\rho, \theta$ , exprimés en fonction de  $t$ .

On connaît les formules de transformation en coordonnées cartésiennes:

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta$$

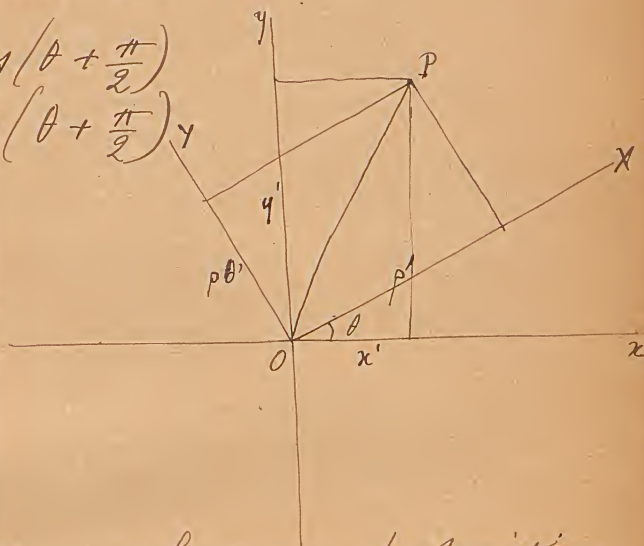


Ces formules définissent  $x$  et  $y$  en fonction de  $t$ , et déterminent la courbe en coordonnées rectangulaires. Prenons les dérivées de ces 2 équations par rapport à  $t$ :

$$x' = \rho' \cos \theta + \rho \theta' \cos \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$y' = \rho' \sin \theta + \rho \theta' \sin \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right)$$

Soient  $OX, OY$  les 2 directions  $\theta$  et  $\left( \theta + \frac{\pi}{2} \right)$ . Portons sur  $OX$  et  $OY$  respectivement 2 segments égaux à  $\rho'$  et  $\rho \theta'$ , à partir de l'origine, avec leur signe (les sens  $OX, OY$  étant positifs.)



On voit que  $x', y'$  sont respectivement la somme des projections de ces 2 segments sur  $Ox, Oy$ , c'à d. les projections de leur résultante. Soit  $P$  le point  $(\rho', \rho \theta')$  Le segment  $OP$  définit sans ambiguïté la direction de la tangente qui correspond au sens de  $t$  croissant. La tangente de l'angle de  $OP$  avec  $OX$  est :

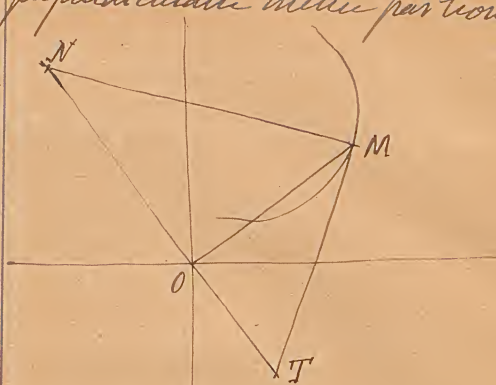
$$\frac{\rho \theta'}{\rho'} = \frac{\rho d\theta}{d\rho}$$

Cet angle est égal à celui que fait la tangente au point  $(\rho, \theta)$  avec le rayon vecteur de ce point. — L'angle de la normale avec le rayon vecteur s'obtient immédiatement.

On peut calculer aussi la sous-normale et la sous-tangente en coordonnées polaires. Soient la normale  $MN$  et la tangente  $MT$



limites à leur rencontre avec la perpendiculaire menée par l'origine au rayon vecteur. On convient de considérer comme positifs les directions  $\theta=0$ , et  $\theta=\frac{\pi}{2}$ .  $ON$  et  $OT$  sont alors définies sans ambiguïté. L'éq. de la tangente est:



$$\frac{X-p}{\rho'} = \frac{Y}{\rho\theta'}$$

et celle de la normale est:

$$(X-p)\rho' + Y\rho\theta' = 0$$

Si l'on fait  $X=0$ , on a les éq. de la sous tangente et de la sous-normale au p.  $Y$ :  $OT = -\frac{\rho^2\theta'}{\rho'} = -\rho^2 \frac{d\theta}{d\rho}$   $ON = \frac{\rho'}{\theta'} = \frac{d\rho}{d\theta}$

La méthode qu'on vient d'appliquer aux coordonnées polaires s'appliquerait à un système de coordonnées curvilignes quelconque.

Supposons un point défini par 2 coordonnées curvilignes  $u, v$ ; c'est l'intersection des 2 courbes correspondant aux équations;

$$u = c^1$$

$$v = c^2$$

Soient les formules de transformation en coordonnées rectilignes:

$$x = f(u, v)$$

$$y = \varphi(u, v)$$

Si  $u$  et  $v$  sont fonctions d'un paramètre  $t$ , ces 2 équations définissent la courbe en coordonnées rectilignes.

Considérons le cas le plus général d'une courbe tracée sur une surface quelconque (et non plus sur un plan). Soient:

$$x = f(u, v)$$

$$y = \varphi(u, v)$$

$$z = \psi(u, v)$$



Les équations de cette surface. Si  $u$  et  $v$  sont fonctions d'une param.  
 $t$ , ces 3 équations définissent une courbe de cette surface.  
 Prenons les dérivées par rapport à  $t$ :  $x' = f'_u u' + f'_v v'$

$$y' = \varphi'_u u' + \varphi'_v v'$$

$$z' = \psi'_u u' + \psi'_v v'$$

Ces 3 quantités, considérées comme paramètres directs, définissent  
 la direction de la tangente qui correspond à  $t$  croissant. Appelons  
 $\alpha, \beta, \gamma$  les cosinus directeurs qui répondent à  $f'_u, \varphi'_u, \psi'_u$ ,  
 c'est-à-d. ceux de la tangente à la courbe:  $v = \text{cte}$

qui passe par le point considéré; de même, appelons  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$   
 les cosinus directeurs qui répondent à  $f'_v, \varphi'_v, \psi'_v$ ,  
 c'est-à-d. ceux de la tangente à la courbe:  $u = \text{cte}$   
 qui passe par le point considéré. On a :

$$\alpha = \frac{f'_u}{\sqrt{E}} \quad \beta = \frac{\varphi'_u}{\sqrt{E}} \quad \gamma = \frac{\psi'_u}{\sqrt{E}}$$

$$\alpha_1 = \frac{f'_v}{\sqrt{G}} \quad \beta_1 = \frac{\varphi'_v}{\sqrt{G}} \quad \gamma_1 = \frac{\psi'_v}{\sqrt{G}}$$

en posant, comme d'habitude:  $E = (f'_u)^2 + (\varphi'_u)^2 + (\psi'_u)^2$

$$G = (f'_v)^2 + (\varphi'_v)^2 + (\psi'_v)^2$$

Les radicaux doivent être pris avec leur valeur arithmétique.

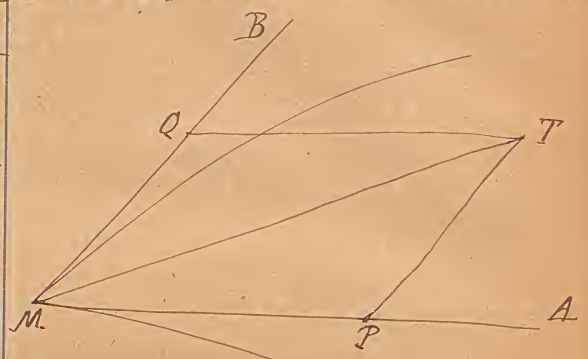
On a alors:  $x' = \alpha u' \sqrt{E} + \alpha_1 v' \sqrt{G}$

$$y' = \beta u' \sqrt{E} + \beta_1 v' \sqrt{G}$$

$$z' = \gamma u' \sqrt{E} + \gamma_1 v' \sqrt{G}$$



Ces formules montrent quesi sur les directions  $(\alpha, \beta, \gamma), (\alpha', \beta', \gamma')$  on porte des segments mesurés par  $u'VE, v'VG$ , avec le signe de  $u', v'$ , les dérivées  $x', y', z'$ , sont les projections de la résultante de ces 2 segments; en sorte que la direction de cette résultante est celle de la tangente à la courbe au point considéré.



Soit M ce point, correspondant à un système de valeurs  $u, v$ , c'èd à une valeur de  $t$ . Faisons les courbes  $u = ct$ ,  $v = ct$  passant par M, et leurs tangentes

MA, MB; sur MA portons  $MP = u'VE$  avec son signe; sur MB,  $MQ = v'VG$  avec son signe; leur résultante MT sera la tangente à la courbe considérée. On peut obtenir par des calculs élémentaires les angles que MT fait avec MA, MB.

Les formules se simplifient beaucoup quand les courbes  $u, v$  sont orthogonales; cette condition s'exprime par l'équation:

$$f_u' f_v' + g_u' g_v' + h_u' h_v' = 0 \quad \text{ou} \quad F' = 0.$$

On retrouverait par exemple les formules données plus haut dans le cas des coordonnées polaires.

MT est toujours dans le plan AMB; si  $u', v'$  varient, c'èd si les fonctions  $u$  et  $v$  changent, MT décrit le plan AMB. On retrouve encore ici la notion du plan tangent à la surface.



Sur le cas général des coordonnées curvilignes dans l'espace, nous nous bornerons à de simples indications.

Supposons que tous les points de l'espace soient rapportés à un système de coordonnées curvilignes  $u, v, w$ . Soient les formules de transformation en coordonnées cartésiennes :

$$x = f(u, v, w) \quad y = \varphi(u, v, w) \quad z = \psi(u, v, w)$$

Chaque point de l'espace est considéré comme l'intersection de 3 surfaces  $(u_0), (v_0), (w_0)$ . La surface  $(u_0)$  par exemple est obtenue en faisant  $u = u_0$ , et en faisant varier  $v$  et  $w$ ; ainsi des autres. Ces 3 surfaces se coupent deux à deux suivant

3 courbes qui se rencontrent au p.  $(u_0, v_0, w_0)$ . Par exemple, les surfaces  $(u_0)$  et  $(v_0)$  se coupent suivant la courbe qu'on obtient en faisant  $u = u_0, v = v_0$ , et en faisant varier  $w$  seule.

Les tangentes en M aux 3 courbes forment un trièdre.

Si maintenant on fait  $u, v, w$  fonctions d'un paramètre  $t$ , les 3 équations définissent une courbe, en coordonnées rectilignes; on pourra trouver 3 nombres mesurant des segments relatifs aux 3 directions des tangentes aux 3 courbes, et la tangente à la courbe sera la résultante de ces segments.

Examinons encore le cas d'une courbe rapportée à un système de coordonnées trilineaires (dans le plan) ou tétraédriques (dans l'espace.) Les coordonnées  $x, y, z, u$ , seront par définition, des quantités proportionnelles à autant de fonctions linéaires, indépendantes, des coordonnées cartésiennes. Cela posé, si



123  
 $x, y, z$  sont définies en fonction d'un paramètre  $t$ , elles déterminent une courbe du plan. On définira la tangente à la courbe au p.  $(x, y, z)$  : une droite qui joint le p.  $(x, y, z)$  au point  $(x', y', z')$ ,  $x', y', z'$  étant les dérivées par rapport à  $t$ . En effet, les coordonnées d'un point voisin du point  $(x, y, z)$  ou  $(t)$  seront :  $f(t+h)$ ,  $g(t+h)$ ,  $\psi(t+h)$

Tout point situé sur cette droite qui joint les 2 points voisins  $(t)$  et  $(t+h)$  a pour coordonnées :

$$\lambda f(t) + \mu f(t+h), \quad \lambda g(t) + \mu g(t+h), \quad \lambda \psi(t) + \mu \psi(t+h).$$

En particulier, les expressions :

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \quad \frac{g(t+h) - g(t)}{h}, \quad \frac{\psi(t+h) - \psi(t)}{h}$$

sont les coordonnées d'un point situé sur cette droite. Si l'on fait tendre  $h$  vers 0, cette droite devient la tangente à la courbe au point  $t$ , et l'on voit qu'elle passe par le point  $(x', y', z')$ .

De même, dans l'espace, les dérivées des 3 coordonnées sont les coordonnées d'un point de la tangente.

Si l'on a les coordonnées cartésiennes :

$$x = \frac{at^2 + bt + c}{a'''t^2 + b'''t + c'''} \quad , \quad y = \frac{a't^2 + b't + c'}{a'''t^2 + b'''t + c'''} \quad , \quad z = \frac{a''t^2 + b''t + c''}{a'''t^2 + b'''t + c'''}.$$

elles définissent une conique quelconque. On peut définir cette courbe par les 4 équations en coordonnées tétraédriques :

$$\begin{aligned} x &= at^2 + bt + c & y &= a't^2 + b't + c' & z &= a''t^2 + b''t + c'' & u &= a'''t^2 + b'''t + c''' \\ x' &= 2at + b & y' &= 2a't + b' & z' &= 2a''t + b'' & u' &= 2a'''t + b''' \end{aligned}$$



Prendons la tangente au point  $t=0$ , dont les coordonnées cartésiennes sont:  $\frac{c}{c'''} , \frac{c'}{c'''} , \frac{c''}{c'''} .$

Elle passe par le point dont les coordonnées cartésiennes sont:  $\frac{b}{b'''} , \frac{b'}{b'''} , \frac{b''}{b'''} .$

La conique <sup>quand on fait  $\frac{1}{t} = 0$</sup>  ~~conique~~ qui passe par le point  $(\frac{a}{a'''} , \frac{a'}{a'''} , \frac{a''}{a'''})$  a pour tangente la droite qui joint ce point au point  $(\frac{b}{b'''} , \frac{b'}{b'''} , \frac{b''}{b'''})$ .

Si la courbe est définie dans le plan par une eq. homogène:  $f(x, y, z) = 0$  et qu'on regarde  $x, y, z$  comme fonctions d'un paramètre  $t$ , on aurait, en prenant les dérivées par rapport à  $t$ :  $f'_x x' + f'_y y' + f'_z z' = 0$ .

Donc le point  $(x', y', z')$  est sur la droite:

$$X f'_x + Y f'_y + Z f'_z = 0$$

On retrouve ainsi l'équation de la tangente.



30°

## Definition de l'arc de courbe.

Considérons une courbe définie en coordonnées rectangulaires par les 3 eq :  $x = f(t)$ ,  $y = \varphi(t)$ ,  $z = \psi(t)$  et une portion de cette courbe correspondant aux valeurs de  $t$  comprises entre  $a$  et  $b$ . Nous supposons que les 3 fonctions  $f$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  sont continues, ainsi que leurs dérivées, dans l'intervalle  $(a, b)$  et que les dérivées  $f'$ ,  $\varphi'$ ,  $\psi'$  ne s'annulent pas simultanément dans cet intervalle (on exclut ainsi l'hypothèse de points singuliers). Partageons l'intervalle  $(a, b)$  en  $n$  intervalles, en intercalant  $(n-1)$  valeurs de  $t$  entre  $a$  et  $b$  dans l'ordre de leurs grandeurs croissantes, par exemple :

$$a < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_{n-1} < b$$

On obtient ainsi  $(n-1)$  points intermédiaires sur la courbe, qui se suivent dans l'ordre ci-dessus. On fera ensuite croître indéfiniment le nombre des valeurs intermédiaires, en leur imposant la condition que la différence entre 2 valeurs consécutives soit moindre que  $\epsilon$ . Joignons par des segments de droite tous les points consécutifs qui correspondent aux valeurs  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-1}$ . On forme ainsi une ligne brisée inscrite dans l'arc de courbe  $(ab)$ ; on voit que le nombre de ses côtés augmentera indéfiniment et qu'ils tendront tous vers 0; on va prouver que le périmètre de cette ligne polygonale tend alors vers une limite, qui sera par définition la longueur de l'arc  $(ab)$ .



Soient 2 valeurs intermédiaires consécutives :  $t_\alpha, t_{\alpha+1}$ ; joignons les 2 points correspondants par un segment de droite; la longueur de cette corde sera:  $\sqrt{[f(t_{\alpha+1}) - f(t_\alpha)]^2 + [\varphi(t_{\alpha+1}) - \varphi(t_\alpha)]^2 + [\psi(t_{\alpha+1}) - \psi(t_\alpha)]^2}$

Or on a, en vertu du théorème des accroissements finis:

$$f(t_{\alpha+1}) - f(t_\alpha) = (t_{\alpha+1} - t_\alpha) f'(\theta_\alpha)$$

$\theta_\alpha$  étant une valeur comprise entre  $t_\alpha$  et  $t_{\alpha+1}$ . Remplaçons la différence  $f(t_{\alpha+1}) - f(t_\alpha)$  et les différences semblables en  $\varphi$  et  $\psi$  par leurs expressions en fonction des dérivées correspondantes; on pourra faire sortir  $(t_{\alpha+1} - t_\alpha)$  du radical car c'est une quantité non nulle, et on aura:

$$(t_{\alpha+1} - t_\alpha) \sqrt{f'^2(\theta_\alpha) + \varphi'^2(\theta_\alpha) + \psi'^2(\theta_\alpha)}$$

Nous avons supposé que  $f', \varphi', \psi'$  étaient continues; les 3 dérivées soumises au radical diffèrent donc très-peu de  $f'(t_\alpha), \varphi'(t_\alpha), \psi'(t_\alpha)$ , de sorte que, à tout nombre positif  $\varepsilon$  on peut faire correspondre un autre nombre positif  $\eta$  tel que si tous les intervalles partiels  $(t_{\alpha+1} - t_\alpha)$  sont plus petits que  $\eta$ , on ait:

$$\left| f'(\theta_\alpha) + \varphi'(\theta_\alpha) + \psi'(\theta_\alpha) - [f'(t_\alpha) + \varphi'(t_\alpha) + \psi'(t_\alpha)] \right| < \varepsilon$$

Posons donc:  $F(t) = f'(t) + \varphi'(t) + \psi'(t)$

Le radical pourra s'écrire:  $\sqrt{F(t_\alpha) + \varepsilon'} \quad |\varepsilon'| < \varepsilon$

On a supposé que les 3 dérivées premières ne s'annulaient pas simultanément, donc  $F(t)$  ne peut être nul. On peut donc



admettre que  $F(t)$  reste supérieur à un nombre positif fixe  $A$ ,  
car une fonction continue dans un intervalle atteint son maximum  
et son minimum.  $F(t) > A$ .

On peut l'admettre également pour  $(F(t) + \varepsilon')$  qui diffère très peu  
de  $F(t)$ : on aura:  $\sqrt{F(t) + \varepsilon'} - \sqrt{F(t)} = \frac{\varepsilon'}{\sqrt{F(t) + \varepsilon'} + \sqrt{F(t)}} < \frac{\varepsilon'}{2\sqrt{A}}$

Donc si l'on substitue  $\sqrt{F(t_\alpha)}$  à  $\sqrt{F(t_\alpha)}$  dans l'expression  
de la longueur du segment:  $(t_{\alpha+1} - t_\alpha) \sqrt{F(t_\alpha)}$

on commet une erreur moindre que  $\frac{\varepsilon'}{2\sqrt{A}}$ ,

et dans la somme de ces longueurs élémentaires

l'erreur totale sera inférieure à:  $\frac{\varepsilon}{2\sqrt{A}} \sum (t_{\alpha+1} - t_\alpha) = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{A}} (b-a)$

qui peut être rendue aussi petite qu'on veut.

Or la somme:  $\sum (t_{\alpha+1} - t_\alpha) \sqrt{F(t_\alpha)}$  a pour limite

$\int_a^b \sqrt{F(t)} dt$  - Donc la longueur totale de la ligne  
polygonale a pour limite cette même intégrale, qui est par  
définition la longueur de l'arc de courbe  $(a, b)$ .

Remarques. On a supposé que <sup>les valeurs</sup>  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-1}$  allaient  
en croissant. Cela signifie géométriquement que les points corres-  
pondants se succèdent dans cet ordre sur l'arc de courbe.  
En effet, la direction  $t_1, t_2$  diffère très peu de la direction de la  
tangente à la courbe en  $t_1$ , qui correspond à  $t$  croissant, et de  
même la direction  $t_2, t_3$  diffère très peu de la direction de la tangente



en  $t_2$ ; ces 2 directions sont donc très-voisines, et l'angle  $t_1, t_2, t_3$  est très-obtus, ce qui montre que la ligne brisée  $t_1, t_2, t_3$  se confond presque avec la courbe. Sans cette condition, la ligne polygonale inscrite dans l'arc de courbe pourrait retrograder et se croiser, de sorte qu'elle n'aurait aucune limite déterminée, tandis que la notion d'arc de courbe exige qu'elle ait une limite fixe.

— La condition  $F(t) > 0$  intervient dans la démonstration pour qu'on puisse poser:  $F(t) > A$ , et qu'on ait:

$$\sqrt{F(t) + \varepsilon'} - \sqrt{F(t)} < \frac{\varepsilon'}{2\sqrt{A}}.$$

Elle n'est pas indispensable à l'existence de la limite en question pourvu que  $F(t)$  ne s'annule qu'un nombre fini de fois dans l'intervalle  $(a, b)$ . Soit en effet par exemple le point  $M$  correspondant à la valeur  $m$ , pour laquelle  $f', \varphi', \psi'$  s'annulent à la fois; prenons de part et d'autre les points  $M', M''$ , correspondant aux valeurs très-voisines  $m', m''$ . — On aura:



$$\text{arc } AM' = \int_a^{m'} \sqrt{F(t)} dt$$

$$\text{arc } M''B = \int_{m''}^b \sqrt{F(t)} dt$$

D'ailleurs l'intervalle  $(m', m'')$  peut être pris aussi petit qu'on veut, l'erreur commise en prenant  $\text{arc } AM' + \text{arc } M''B$  pour  $\text{arc } AB$  pourra être rendue plus petite que toute quantité donnée; donc la



138  
définition précédente subsiste, et l'on a toujours :

$$\text{arc } AB = \int_a^b \sqrt{F(t)} dt.$$

L'intégrale:  $\int_a^b \sqrt{f'^2(t) + \varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$

donne lieu aux remarques suivantes :

Si l'on fait le changement de variables :  $t = \chi(\theta)$ ,  
les 3 coordonnées deviennent respectivement :

$$x = f_1(\theta), \quad y = \varphi_1(\theta), \quad z = \psi_1(\theta)$$

Soient  $\alpha', b'$  les valeurs de  $\theta$  pour lesquelles  $t = a$ ,  $t = b$ ;

L'intégrale devient:  $\int_{\alpha'}^{b'} \sqrt{f_1'^2(\theta) + \varphi_1'^2(\theta) + \psi_1'^2(\theta)} d\theta$

L'identité de cette intégrale et de l'ancienne est facile à vérifier  
directement, car on a:  $f_1'(\theta) = f'(t) \chi'(\theta)$ , et  $d\theta = \frac{dt}{\chi'(\theta)}$ .

— Si au lieu de la limite supérieure  $b$  nous mettons la variable  
 $t$ , nous aurons l'expression de la longueur <sup>variable</sup> de l'arc de courbe  
compris entre le point fixe  $A$  et le point mobile  $I$ . C'est l'arc  
de courbe compté à partir du point  $A$  et exprimé en fonction  
de  $t$ . La dérivée de cet arc variable par rapport à  $t$  est :

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{f'^2(t) + \varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$$

Si l'on remplace les dérivées par des quotients différentiels, qu'on  
élève au carré et qu'on multiplie par  $dt^2$ , on aura la



relations :  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

Interprétation géométrique. Si nous considérons  $dt$  comme un infiniment petit du 1<sup>er</sup> ordre,  $dx, dy, dz$  seront les accroissements de  $x, y, z$  correspondant à  $dt$ . En négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au 2<sup>e</sup>,  $(dx^2 + dy^2 + dz^2)$  est égal au carré du segment de droite qui va du point  $t$  au point  $(t+dt)$ . Ainsi, aux infiniment petits pris d'ordre supérieur au 2<sup>e</sup>, le carré de l'accroissement de l'arc est égal au carré de la corde; donc l'arc est égal à sa corde aux infiniment petits pris d'ordre supérieur au 1<sup>er</sup>. Autrement dit, le rapport de l'arc à sa corde a pour limite 1 quand les extrémités s'approchent indéfiniment.

— Cette remarque peut servir à trouver la différentielle de l'arc de courbe dans d'autres systèmes de coordonnées.

Supposons que les coordonnées soient obliques, et soient  $\lambda, \mu, \nu$  les angles que font deux à deux les axes  $Ox, Oy, Oz$ . Le carré de la corde sera :

$dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2dydz \cos \lambda + 2dx dz \cos \mu + 2dx dy \cos \nu + \dots$   
 en négligeant les termes infiniment petits d'un ordre supérieur au 2<sup>e</sup>. On aura donc :

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} + \frac{2dydz \cos \lambda}{dt^2} + \frac{2dx dz \cos \mu}{dt^2} + \frac{2dx dy \cos \nu}{dt^2} +$$

plus des infiniment petits qui s'annulent en même temps que  $dt$ .  
 On a donc rigoureusement, quand  $\frac{ds}{dt}$  atteint sa limite, qui est



130  
La dérivée de  $s$  par rapport à  $t$ , la relation précédente, où  $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$  sont devenus rigoureusement égaux aux dérivées de  $x, y, z$  par rapp. à  $t$ ; on aura donc rigoureusement, en multipliant par  $dt^2$ :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2dx dz \cos \lambda + 2dx dy \cos \mu + 2dy dz \cos \nu.$$

Dans le cas d'une courbe plane rapportée à des axes obliques, on a:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + 2dx dy \cos \theta$$

et dans le cas des coordonnées rectangulaires:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

— Remarque. On peut convenir de fixer un point sur une courbe en mesurant l'arc qu'il intercepte sur cette courbe à partir d'un point fixe, l'arc étant compté positivement dans un sens et négativement dans l'autre à partir du p. fixe  $\alpha$ . Chaque point de la courbe sera défini sans ambiguïté par l'arc qui va du p.  $\alpha$  à ce point. Alors  $x, y, z$ , au lieu d'être fonctions de la variable  $t$ , seront des fonctions de l'arc variable  $s$ . Dans ce cas, on devra avoir:  $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$ .

Il importe de se rendre compte de la signification géométrique de ces dérivées. — En général,  $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$  définissent sans ambiguïté la direction de la tangente correspondant à  $t$  croissant. Les cosinus directeurs de la tangente sont alors:

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}, \quad \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}, \quad \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}$$



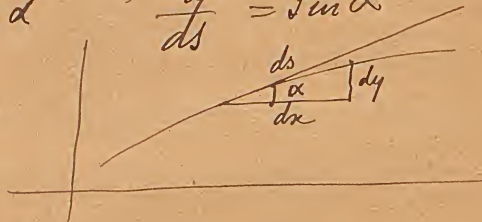
131  
Le radical étant pris avec le signe +.

Le même,  $\frac{dx}{ds}$ ,  $\frac{dy}{ds}$ ,  $\frac{dz}{ds}$  définissent la direction de la tangente correspondant aux arcs croissants, et ce sont précisément les cosinus directeurs de la tangente, puisque la somme de leurs carrés est 1.

Dans le cas d'une courbe plane,  $\frac{dx}{ds}$  et  $\frac{dy}{ds}$  sont respectivement le cosinus et le sinus de l'angle que la tangente au pt.  $(x, y)$  fait avec l'axe des  $x$ :  $\frac{dx}{ds} = \cos \alpha$   $\frac{dy}{ds} = \sin \alpha$

Ces 2 relations sont manifestes sur la figure.

On ferait la même remarque pour une courbe de l'espace.



Examinons maintenant le cas d'une courbe plane en coordonnées polaires  $\rho, \theta$ . Considérons le système de coordonnées rectangulaires dont l'axe des  $x$  serait l'axe polaire et l'axe des  $y$  une perpendiculaire menée à l'axe polaire par le pôle. Le pôle devient l'origine, et les formules de transformation sont:  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ .

Preons les différentielles;

$$dx = d\rho \cos \theta - \rho \sin \theta d\theta$$

$$dy = d\rho \sin \theta + \rho \cos \theta d\theta$$

$$\text{d'où : } dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{d\rho^2}{dt^2} + \rho^2 \frac{d\theta^2}{dt^2}} dt$$

$t$  étant le paramètre variable ou fonction duquel sont exprimés  $\rho$  et  $\theta$ , et qui définit ainsi la courbe considérée.



Ces résultats peuvent être immédiatement obtenus sans calcul par la simple inspection de la figure, qui les rend évidents. Soient  $M$ ,  $M'$  les 2 points voisins de la courbe; l'angle  $MMO$  est  $d\theta$ . Si l'on trace l'arc de cercle  $PM'$  du centre  $O$ , on a, en négligeant les infiniment petits du 2<sup>e</sup> ordre,

$$PM' = dp, \quad MM' = ds, \quad \text{et} : \quad \text{arc } PM = p d\theta = \text{corde } PM.$$

Le triangle  $PMM'$  peut être considéré comme rectiligne et rectangle; il donne:

$$ds^2 = dp^2 + p^2 d\theta^2$$

L'angle de la tangente à la courbe en  $M$  ~~est~~ avec le rayon vecteur est  $\widehat{PM'M}$ , toujours aux infiniment petits pris du 2<sup>e</sup> ordre; appelons  $V$  cet angle:  $dp = ds \cos V$   $p d\theta = ds \sin V$

$$\tan V = \frac{p d\theta}{dp}$$

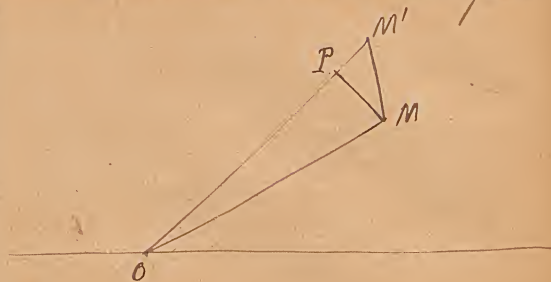
Nous n'insistons pas sur le sens de la tangente et le signe de l'angle; il nous suffit d'avoir retrouvé géométriquement des formules démontrées analytiquement et discutées plus haut.

— On établirait de même les formules de l'arc de courbe dans un système de coordonnées planes quelconques.

— Considérons plus généralement une courbe appartenant à la surface que définissent les 3 équations:

$$x = f(u, v) \quad y = \varphi(u, v) \quad z = \psi(u, v)$$

Si l'on exprime  $u$  et  $v$  en fonction d'un paramètre variable  $t$ ,





on décrira une courbe sur cette surface. On a les différentielles :

$$dx = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \quad dy = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv \quad dz = \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

en posant, comme toujours :

$$E = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 \quad G = \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v}$$

Si l'on suppose que  $u$  et  $v$  sont fonctions de  $t$ ,  $du$ ,  $dv$  deviennent :  $u' dt$ ,  $v' dt$   $u' = \frac{du}{dt}$ ,  $v' = \frac{dv}{dt}$ .

On a donc :  $ds^2 = \left[ E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \right] dt^2$

et  $S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt$

La quantité soumise au radical est appelée <sup>le carré de</sup> l'élément linéaire de la courbe.

Dans le cas où l'on fait  $v$  constante, la formule se réduit à :  $ds^2 = E du^2$

Ainsi dans une courbe de la surface pour laquelle  $v$  est constant, la différentielle de l'arc est  $du \sqrt{E}$ ;  $\sqrt{E}$  est donc la dérivée de l'élément linéaire de la courbe par rapport à  $u$ . De même,  $dv \sqrt{G}$  est la différentielle de l'arc d'une courbe pour laquelle  $u$  est



134  
constante, et  $\sqrt{G}$  est la dérivée de l'élément linéaire de la courbe par rapport à  $v$ . Ces remarques permettent d'interpréter géométriquement la formule:  $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$

Soit le point  $O$  ayant pour coordonnées  $u, v$ ;  $A$  correspondant à  $(u+du, v)$ ,  $B$  à  $(u, v+dv)$ . Par  $A$  et par  $B$  menons les 2 courbes  $u+du = c^te$ ,  $v+dv = c^te$ . Elles se coupent en  $C$ , qui a donc pour coordonnées:  $u+du, v+dv$ .

L'arc  $AC$  est égal à l'arc  $OB$ , aux infiniment petits près du 2<sup>e</sup> ordre; en effet,  $OB = \sqrt{G} dv$ ; pour avoir  $AC$  il faudrait remplacer dans  $G$ ,  $u$  par  $u+du$ ; ce qui n'introduirait que des infiniment petits du 2<sup>e</sup> ordre au moins. Ainsi la figure  $OABC$  peut être considérée comme un parallélogramme. Or  $ds$  est  $OC$ ; le triangle  $OAC$ , regardé comme rectiligne, donne:

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2 + 2\overline{OA} \cdot \overline{AC} \cos \theta$$

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2 + 2\sqrt{E \cdot G} du dv \cos \theta$$

$$\text{Or: } \cos \theta = \frac{F}{\sqrt{E \cdot G}}$$

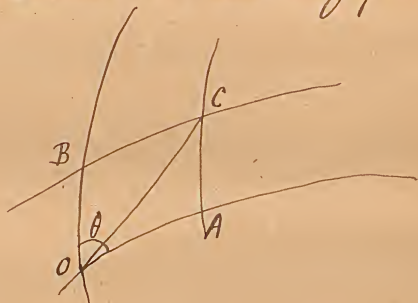
On retrouve donc la formule:  $ds^2 = E du^2 + G dv^2 + 2F du dv$

Cette formule contient comme cas particulier la formule des coordonnées polaires,  $\varphi$  étant constamment nulle:

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \rho^2$$

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$$

— Supposons par exemple que  $E$  ne contienne pas  $v$ ; on aura

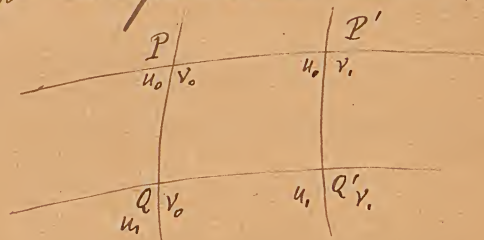




pour les courbes où  $v$  est constante:  $ds = du \sqrt{E}$   
 et pour la longueur de l'arc:  $S = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{E} du$

expression indépendante de  $v$ .

Marquons les points  $P, Q$  <sup>de la courbe  $v_0 = c^{te}$</sup>  correspondant à  $u_0, u_1$ ; menons par  $P$  et  $Q$  les courbes pour lesquelles  $u$  est constante; menons une seconde courbe  $v_1 = c^{te}$  qui coupe les 2 précédentes en  $P', Q'$ .



Si l'intégrale qui mesure  $PQ$  est indépendante de  $v$ , cela veut dire que l'arc  $P'Q'$  est égal à l'arc  $PQ$ , et cela quelque soit la valeur de  $v_1$ .

C'est ce qui a lieu dans le cas des coordonnées polaires. Les courbes  $\rho = c^{te}$  sont des cercles ayant pour centre le pôle; les courbes  $\theta = c^{te}$  sont des droites issues du pôle. Les segments de 2 droites quelconques compris entre 2 cercles concentriques sont égaux, parce que le coefficient  $E$  de  $d\rho^2$  ne contient pas  $\theta$ .

— Considérons encore le cas des courbes planes définies par une relation entre  $p$  et  $\alpha$ ; l'équation de leur tangente est:

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = p$$

$p$  étant fonction de  $\alpha$ .

Un point quelconque de la courbe est déterminé par l'équation précédente jointe à la suivante:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p'$$

$p'$  étant la dérivée de  $p$  par rapport à  $\alpha$ . On peut exprimer  $x$  et  $y$  en fonction de  $p$  et  $\alpha$  en les tirant des eq. précédentes:



$$x = p \sin \alpha + p' \cos \alpha$$

$$y = -p \cos \alpha + p' \sin \alpha$$

$$ds = (p + p'') d\alpha$$

$$dx = (p + p'') \cos \alpha d\alpha$$

$$dy = (p + p'') \sin \alpha d\alpha$$

Ces formules sont commodes pour rectifier certaines courbes, comme les épicycloïdes et la spirale logarithmique.

— Application au calcul de la longueur d'un arc de loxodromie:

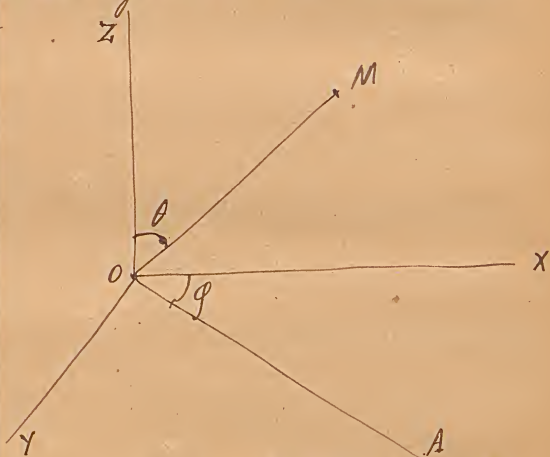
La loxodromie est une courbe sphérique qui coupe tous les méridiens sous un angle constant (c'est l'analogue de la spirale logarithmique dans le plan). — Nous allons d'abord montrer comment on peut fixer un point sur une sphère par sa longitude et sa colatitude.

Toute direction de l'espace peut être déterminée par 2 angles; soit le point M rapporté à 3 axes orthogonaux. Le plan ZOM coupe le plan XOY suivant OA; prenons par exemple OA pour demi-droite positive, et posons  $\hat{AOX} = \varphi$ .

Posons ensuite  $\hat{MOZ} = \theta$ .

Le sens positif de OA étant fixé,  $\varphi$  est déterminé à un multiple près de  $2\pi$ . Si l'on fixe en outre le sens des angles positifs dans le plan ZOA à partir de OZ,  $\theta$  sera déterminé à un multiple près de  $\pi$ . Mais si l'on se donne  $\varphi$  et  $\theta$ , la direction OM sera absolument déterminée.

Dans une sphère, un point de la surface est défini sans ambiguïté par les 2 angles  $\varphi$  et  $\theta$ , qui sont sa longitude et sa colatitude;





137  
on aura tous les points de la sphère en faisant varier  $\varphi$  de 0 à  $2\pi$ ,  
et  $\theta$  de 0 à  $\pi$ . Nous supposons, pour simplifier, le rayon égal  
à l'unité;  $x = \sin\theta \cos\varphi$   $y = \sin\theta \sin\varphi$   $z = \cos\theta$

Les courbes  $\varphi = c^e$  sont les méridiens, et les courbes  $\theta = c^e$   
sont les parallèles, dont le rayon est  $\sin\theta$ . La différentielle du  
méridien est  $d\theta$ ; la différentielle d'un parallèle est  $\sin\theta d\varphi$ .

On a évidemment  $F' = 0$ , car les Lignes de courbes sont  
orthogonales. Donc:  $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$

Nous pouvons maintenant définir analytiquement la loxodromie —  
Désignons par  $\alpha$  l'angle constant que cette courbe fait avec les  
méridiens. Supposons que  $\theta$  et  $\varphi$  soient des fonctions d'un para-  
mètre  $t$  telles qu'elles définissent la loxodromie. La tangente à  
la courbe s'obtiendra en prenant sur la tangente au méridien un  
segment  $\theta'$ , sur la tangente au parallèle un segment  $\sin\theta \varphi'$ ,  
et en composant ces 2 segments.

On a ainsi:  $d\theta = ds \cos\alpha$

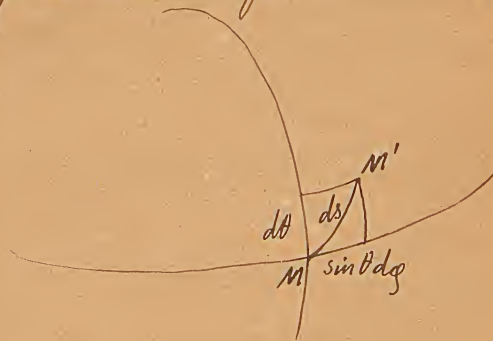
$$\sin\theta d\varphi = ds \sin\alpha$$

d'où l'équation différentielle obtenue  
en éliminant  $ds$ :

$$d\theta^2 = (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \cos^2\alpha$$

$$d\theta^2 \sin^2\alpha = \sin^2\theta \cos^2\alpha d\varphi^2 \quad d\varphi = \operatorname{tg}\alpha \frac{d\theta}{\sin\theta}$$

$$\varphi = \operatorname{tg}\alpha \int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\alpha \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$





On fera rentrer dans  $q$  la constante d'intégration en faisant tourner le méridien origine. On tire  $\theta$  en fonction de  $q$  :

$$\theta = \text{Larc tg} \left( e^{\frac{2q}{R\alpha}} \right) \quad \text{Pour } q = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi la courbe part d'un point de l'équateur, dont le méridien servira d'origine pour les longitudes. Quand  $q$  croît indéfiniment,  $\theta$  tend vers  $\pi$  ; quand  $q$  décroît indéfiniment dans le sens négatif  $\theta$  tend vers 0. On a ainsi une infinité de spirales tournant autour de chaque pôle et s'en approchant indéfiniment.

La longueur des arcs est donnée par la formule :

$$\theta = s \cos \alpha + C \quad \text{tirée de : } d\theta = ds \cos \alpha.$$

Si l'on veut que les arcs partent de l'équateur, il faudra prendre

$$C = \frac{\pi}{2}, \quad \text{valeur de } \theta \text{ correspondant à } q = 0.$$

31°

Détermination de l'aire d'une portion de surface.

Soit une surface définie en coordonnées rectangulaires par les 3 éq.

$$x = f(u, v) \quad y = \varphi(u, v) \quad z = \psi(u, v)$$

Preuons dans un plan 2 axes rectangulaires  $Ou, Ov$ , sur lesquels nous porterons les paramètres  $u, v$  ; à chaque point du plan correspondra en général un point de la surface. Supposons que cette correspondance soit telle, qu'à chaque point de la portion de plan  $A$  corresponde un point, et un seul, de la portion de surface  $A'$ , et réciproquement ; et qu'à 2 points infiniment voisins dans  $A$  correspondent 2 points infiniment voisins dans  $A'$  ;



et réciproquement. Nous supposons en outre que les 3 déterminants fonctionnels:

$$\xi = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \quad \eta = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} \quad \zeta = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v}$$

ne sont pas nuls simultanément à l'intérieur de l'aire  $A'$ , et que dans cette même aire les dérivées premières sont continues et les dérivées secondes finies.

Cela posé, divisons l'aire  $A$  en une multitude de petits triangles tels qu'un quelconque d'entre eux soit extérieur à tous les autres, et que leurs angles ne soient pas infiniment petits, autrement dit, que le rapport de leurs côtés reste fini. A ces petits triangles correspondent en  $A'$  d'autres petits triangles, qui forment une surface polyédrique inscrite dans la surface courbe considérée; on va montrer que l'aire de cette surface polyédrique a une limite qui sera par définition l'aire de la surface courbe, et que nous nous proposons d'évaluer.

L'aire d'un triangle quelconque, dans  $A'$ , a pour valeur la racine carrée de la somme des carrés de ses projections sur les 3 plans coordonnés. Un quelconque d'entre eux aura pour sommets les points:  $(u, v)$   $(u+h, v+k)$   $(u+h', v+k')$

La projection sur le plan  $xOy$  aura pour aire la moitié du déterminant;

$$\pm \begin{vmatrix} \varphi(u+h, v+k) - \varphi(u, v) & \varphi(u+h', v+k') - \varphi(u, v) \\ \psi(u+h, v+k) - \psi(u, v) & \psi(u+h', v+k') - \psi(u, v) \end{vmatrix}$$

On prendra celui des 2 signes qui rend le déterminant positif. Développons les différences qui en sont les ~~facteurs~~ <sup>facteurs</sup> par la formule



de Taylor, en négligeant les termes du 2<sup>e</sup> degré et au-dessus ;

$$\begin{vmatrix} h\varphi'_u + k\varphi'_v & h\psi'_u + k\psi'_v \\ h'\varphi'_u + k'\varphi'_v & h'\psi'_u + k'\psi'_v \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est un produit de 2 déterminants ;

$$\begin{vmatrix} h & k \\ h' & k' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \varphi'_u & \psi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v \end{vmatrix} = \Sigma (hk' - kh')$$

On a supposé que le rapport des côtés du triangle reste fini ; donc les quantités  $h, k, h', k'$  sont infiniment petites du 1<sup>er</sup> ordre commun. L'un quelconque de ces côtés ; ainsi  $(hk' - kh')$  sera un infiniment petit du 2<sup>e</sup> ordre seulement ; on le voit autrement en remarquant que ce déterminant est égal à  $pp' \sin \alpha$ , qui est du 2<sup>e</sup> ordre puisque  $\sin \alpha$  reste fini. Les termes négligés sont du 3<sup>e</sup> ordre et au-dessus.

Si nous évaluons de même l'aire des projections du triangle sur les autres plans ; et que nous fassions précéder la racine de la somme des carrés de ces aires, nous aurons :

$$\frac{1}{2} \sqrt{(hk' - kh')^2 [\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2] + \text{termes du 5<sup>e</sup> ordre}}$$

$$\text{ou : } \pm \frac{1}{2} (hk' - kh') \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \text{infiniment petits}}$$

Les termes infiniment petits soumis au radical peuvent s'écrire :

$M\alpha$ ,  $\alpha$  étant une quantité infiniment petite de l'ordre des côtés du triangle. Puisque par hypothèse les dérivées secondes restent finies dans l'aire  $A'$ , la valeur absolue de  $M$  reste finie ;



et comme on a d'autre part la condition:  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 > 0$   
on peut écrire:

$$\pm \frac{1}{2} (hk' - kh') \left[ \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} + M'\alpha \right]$$

Pour avoir l'aire totale  $A'$ , on effectuera les produits analogues et on ajoutera ensemble les quantités de même ordre:

$$\pm \frac{1}{2} \sum (hk' - kh') \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} + \frac{1}{2} \sum M'\alpha (hk' - kh')$$

$\frac{1}{2} (hk' - kh')$  est l'aire du petit triangle élémentaire <sup>de A</sup> que multiplie une fonction de  $u, v$ ; la somme qui figure au 1<sup>er</sup> terme devient donc, à la limite:

$$\iint_A \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} du dv$$

La 2<sup>e</sup> somme s'annule à la limite, sous les conditions spécifiées plus haut. En effet,  $M'$  reste inférieur à un nombre fini et fixe  $M''$ , et les quantités  $\alpha$  deviennent inférieures à un nombre positif  $\varepsilon$  aussi petit qu'on veut; la 2<sup>e</sup> somme est donc inférieure à:

$$\frac{1}{2} M'' \varepsilon \sum (hk' - kh')$$

Or  $\sum (hk' - kh')$  a pour limite l'aire  $A$ , essentiellement finie; donc l'ensemble tend vers 0. Ainsi l'aire polyédrique inscrite dans la surface  $A$  a pour limite:

$$\iint_A \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} du dv$$

qui est par définition l'aire de la surface  $A$ .

On a d'ailleurs, en vertu de l'identité de Lagrange,

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = EG - F^2$$

L'aire  $A'$  a donc pour expression l'intégrale double:

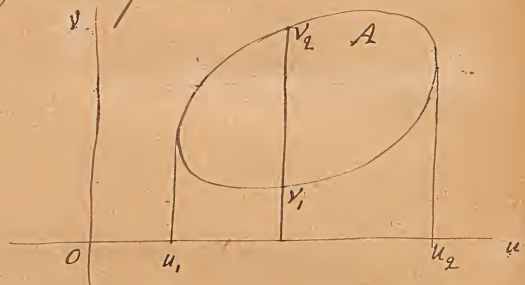
$$\iint \sqrt{EG - F^2} du dv \text{ étendue à tous les points de l'aire } A.$$



On peut considérer cette intégrale comme représentant le volume d'un cylindre parallèle à l'axe des  $w$ , ayant pour base dans le plan des  $(u, v)$  la courbe qui limite l'aire  $A$ , et terminé à la surface qui aurait pour équation:  $w = \sqrt{EG - F'^2}$

Pour évaluer une telle intégrale, supposons l'aire  $A$  limitée par une courbe convexe, de telle sorte qu'une parallèle à l'axe des  $v$  ne rencontre ce contour qu'en 2 points  $v_1, v_2$ . On prend d'abord le intégrale simple:

$$\int_{v_1}^{v_2} \sqrt{EG - F'^2} dv$$



$v_1, v_2$  étant des fonctions de  $u$  qui définissent la courbe fermée qui limite  $A$ . Cette intégrale est une certaine fonction  $F'(u)$ . Puis on fait l'intégration:

$$\int_{u_1}^{u_2} F'(u) du$$

$u_1, u_2$  étant les abscisses qui comprennent l'aire entière  $A$ . Le résultat des 2 opérations est:

$$\int_{u_1}^{u_2} du \int_{v_1}^{v_2} \sqrt{EG - F'^2} dv$$

L'intégrale simple:  $\int_{v_1}^{v_2} \sqrt{EG - F'^2} dv$  représente l'aire d'une section déterminée dans le cylindre par le plan:  $u = c^{\text{te}}$ .

— Il est aisé de retrouver par des considérations géométriques simples les résultats précédents. Soient, sur la surface  $A'$ , les courbes

$$u = c^{\text{te}}, \quad v = c^{\text{te}}$$

passant par un point  $M$ . Sur la 1<sup>re</sup> prenons un point  $A$  dont les coordonnées soient:  $u, v + dv$ ,



sur la 2<sup>e</sup> un p. B  $(u+du, v)$   
et formons le parallélogramme  
infinitésimement petit MACB;

On sait que:  $MA = \sqrt{E} du$   
 $MB = \sqrt{G} dv$

L'aire de ce parallélogramme est  
 $MA \cdot MB \sin \theta$ . Or:

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad \sin \theta = \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}}$$

pour valeur:  $MA \cdot MB \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}} = \sqrt{EG - F^2} du dv$

Tel est l'élément différentiel de l'aire considérée A'. On fera d'abord  
la somme des parallélogrammes infinitésimaux compris entre la  
courbe  $u = c^{te}$  et la courbe:  $u + du = c^{te}$ , c'est la somme  
des quantités  $\sqrt{EG - F^2} du dv$  où  $du$  est constante.

L'intégrale:  $du \int_{v_1}^{v_2} \sqrt{EG - F^2} dv$  représente l'aire de la  
bande comprise entre les courbes  $(u)$  et  $(u + du)$ .

On fera ensuite la somme des bandes analogues:  $\int_{u_1}^{u_2} \sqrt{EG - F^2} du$ .  
L'intégrale:  $\int_{u_1}^{u_2} du \int_{v_1}^{v_2} \sqrt{EG - F^2} dv$  est l'aire cherchée.

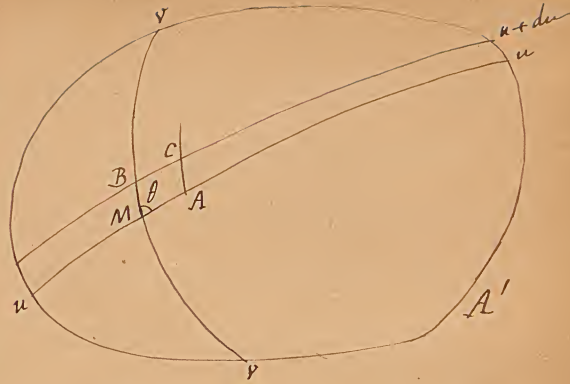
- Considérons quelques cas particuliers.

Soit une surface définie par l'équation:  $z = f(x, y)$

Les paramètres  $u, v$  sont ici  $x, y$  eux-mêmes.

$$dz = p dx + q dy \quad ds^2 = dx^2(1+p^2) + 2pq dx dy + dy^2(1+q^2)$$

$$EG - F^2 = 1 + p^2 + q^2 \quad S = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy$$





Voici la signification géométrique de cette intégrale:  
 $dx dy$  représente l'aire d'un élément  
 rectangulaire de la projection de la  
 surface sur le plan des  $(x, y)$ .

$\sqrt{1+p^2+q^2}$  est l'inverse du cosinus  
 de l'angle que le plan tangent en  
 $(x, y, z)$  fait avec le plan  $(x, y)$

L'intégrale précédente revient donc à :

Or  $\frac{dx dy}{\cos \alpha}$  est l'aire du parallélogramme du plan tangent, qui  
 a pour projection le rectangle  $dx dy$ ; c'est l'élément d'aire de la  
 surface considérée.

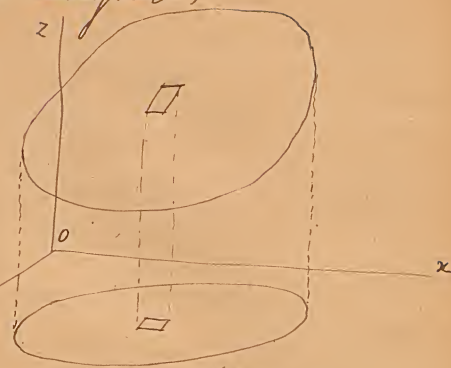
Exercice: Calculer l'aire du parabolôïde hyperbolique:

$z = xy$  qui se projette sur le plan  $(x, y)$  suivant  
 un quart de cercle de centre  $O$  et de rayon  $a$  compris entre les  
 $Z$  axes; — suivant un carré ayant pour côtés les  $Z$  axes  
 et de côté  $a$ .

— Supposons maintenant qu'on ait à évaluer une aire plane  
 dans le plan des  $x, y$ , et voyons ce que signifie la formule générale  
 dans ce cas. La fonction  $z = \psi(u, v)$  est identiquement nulle.

Des 3 déterminants  $\xi, \eta, \zeta$ , il n'en reste que:  $\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v}$   
 L'intégrale devient:

On retrouve ainsi la formule relative au changement de variables  
 sous le signe  $\int$ . C'est l'aire dans le plan des  $x, y$  exprimée en





fonction des coordonnées curvilignes  $u, v$  variant de manière à engendrer la surface considérée. On obtiendrait géométriquement ce résultat, comme précédemment, en découplant la surface en bandes curvilignes de largeur  $du$ , et en sommant ces bandes  $du, dv$ .

— On retrouve, comme cas particulier de cette intégrale, l'expression d'une aire en coordonnées polaires:  $\iint \rho \, d\rho \, d\omega$

Cette formule s'obtient aussi géométriquement. Soit un élément d'aire plane compris entre les cercles  $\rho, (\rho + d\rho)$ , et les droites polaires  $\omega, (\omega + d\omega)$ . C'est un rectangle curviligne, qui, étant infiniment petit, peut être assimilé à un rectangle rectiligne, et qui a pour côtés  $\rho d\omega$  et  $d\rho$ , et pour surface  $\rho d\rho d\omega$ .

On summara d'abord les petits rectangles du secteur  $(\omega, \omega + d\omega)$ , pour lesquels  $d\omega$  est constant; on a ainsi:  $d\omega \int \rho \, d\rho$ .

Les limites de cette intégrale indéfinie, dont la valeur est  $\frac{\rho^2}{2}$ , varient suivant les cas. Si le point  $O$  est à l'extérieur de l'aire, on aura:  $d\omega \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho \, d\rho = d\omega \left( \frac{\rho_2^2}{2} - \frac{\rho_1^2}{2} \right)$

On fera ensuite la somme de tous ces secteurs:  $\int \frac{1}{2} d\omega (\rho_2^2 - \rho_1^2)$

Si le point  $O$  est à l'intérieur, on fera l'intégration:  $\int_0^\pi \frac{1}{2} d\omega (\rho_2^2 + \rho_1^2)$  ou  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\omega \rho^2$

Si le point  $O$  est sur le contour et qu'il y ait 2 tangentes en ce point, faisant les angles  $\omega_1, \omega_2$  avec l'axe polaire, on aura:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{2} \rho^2 d\omega, \quad \text{ou} \quad \int_{\omega_1}^{\omega_1 + \pi} \frac{1}{2} \rho^2 d\omega$$



226  
si la tangente est unique.

Comme 2<sup>e</sup> cas particulier, considérons une surface sphérique, et prenons pour coordonnées, comme précédemment, la longitude  $\varphi$  et la colatitute  $\theta$ . On pourrait calculer  $E, F, G$ ; mais nous trouvons directement leurs valeurs par la géométrie: d'abord:

$F = 0$  car les 2 coordonnées sont des courbes orthogonales.

Posons  $u = \varphi, v = \theta$ :  $\sqrt{E} du = \sin \theta d\varphi$   $\sqrt{E} = \sin \theta$

$\sqrt{G} dv = d\theta$   $\sqrt{G} = 1$  Donc:  $\sqrt{EG - F^2} = \sin \theta$

et l'intégrale indéfinie de la surface est:  $\iint \sin \theta d\theta d\varphi$ .

Application: Calcul de l'aire du triangle sphérique (On ne considère que le cas du triangle rectangle.) Sphère de rayon 1.

Supposons que le sommet B soit sur l'axe des  $z$ , c.à.d. le pôle, et que le sommet A de l'angle droit soit dans le plan  $(x, z)$ ;

les 2 autres côtés sont respectivement un méridien BC et un grand cercle passant par Oy. Il s'agit de déterminer les limites de l'intégrale de manière qu'elle représente le triangle ABC.

Faisons d'abord la somme des éléments d'aire pour lesquels  $d\varphi$  est constant, c'est à dire l'aire d'un fuseau compris entre 2 méridiens infiniment voisins. On fera ensuite la somme de ces fuseaux entre BA et BC:

$$\int_0^B d\varphi \int \sin \theta d\theta$$

Pour déterminer  $\theta'$ , il faut savoir comment  $\theta$  et  $\varphi$  sont liés -

Posons:  $\angle AOB = \gamma$  L'équation du plan AOy est:

$$\frac{z}{\cos \gamma} = \frac{x}{\sin \gamma} \quad \text{On a d'ailleurs: } x = \sin \theta \cos \varphi \quad z = \cos \theta$$



$$\frac{\cos \theta}{\cos \gamma} = \frac{\sin \theta \cos \varphi}{\sin \gamma}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma \cos \varphi}$$

$$\text{Or: } \int_0^{\theta'} \sin \theta d\theta = 1 - \cos \theta'$$

$$\cos \theta = \frac{\cos \gamma \cos \varphi}{\sqrt{\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma \cos^2 \varphi}}$$

$$\int_0^B dq (1 - \cos \theta) = B - \cos \gamma \int_0^B \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma \cos^2 \varphi}}$$

Dans cette dernière intégrale, introduisons  $\operatorname{tg} \varphi$ , que nous désignerons par  $u$ :

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \gamma (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) + \cos^2 \gamma}} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \varphi}}$$

ou, puisque  $d\varphi = \frac{du}{1+u^2}$ ,

$$\int \frac{du}{(1+u^2) \sqrt{1 + u^2 \sin^2 \gamma}}$$

Les intégrales de cette forme se ramènent à la forme rationnelle en posant:

$$y^2 = \frac{u^2}{1 + u^2 \sin^2 \gamma}$$

Si l'on cherche comment  $y$  est liée à  $\varphi$ , on voit qu'on introduit ainsi une variable, qui est l'angle que fait un des méridiens avec le côté  $AC$ , c.à.d:  $\widehat{BB'A} = \lambda$ .

On a la relation:  $\cos \lambda = \cos \gamma \sin \varphi$

Transportons cette variable auxiliaire dans l'intégrale; la différentiation donne:  $-\sin \lambda d\lambda = \cos \gamma \cos \varphi d\varphi$

$$\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma (1 - \sin^2 \varphi) = 1 - \cos^2 \lambda = \sin^2 \lambda$$

$$\begin{aligned} \int_0^B dq (1 - \cos \theta) &= B - \cos \gamma \int_0^B \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sin \lambda} = B - \cos \gamma \int_{\frac{\pi}{2}}^C \frac{-d\lambda}{\cos \gamma} = B + \int_{\frac{\pi}{2}}^C d\lambda \\ &= B + C - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

